КИїВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
ДО ТЕМИ

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНА ФОРМА

для студентів механіко-математинчого факультету

Київ — 1998

Наведено методи розв'язання типових задач з лінійної алгебри, які відносяться до теми "Жорданова нормальна форма". Основну увагу приділено методам обчислення власних векторів та жорданової форми. Наведено повні розв'язання всіх типових задач. Значну кількість задач запропоновано для самостійного розв'язання.

Укладач: В.С.Мазорчук, канд. фіз.-мат. наук

Рецензенти: В.В.Кириченко, д-р фіз.-мат. наук
Ю.С.Самойленко, д-р фіз.-мат. наук

Затверджено Радою
механіко-математичного факультету
12 січня 1998 року

Зміст

1 Вступ **5**

2 Характеристичний многочлен матриці **6**
- 2.1 Теоретичні відомості 6
- 2.2 Основні типи задач 7
- 2.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 7
- 2.4 Приклади 8
- 2.5 Задачі теоретичного характеру 9
- 2.6 Задачі для самостійного розв'язання 10

3 Власні числа та власні вектори **12**
- 3.1 Теоретичні відомості 12
- 3.2 Основні типи задач 13
- 3.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 13
- 3.4 Приклади 14
- 3.5 Задачі теоретичного характеру 21
- 3.6 Задачі для самостійного розв'язання 24

4 Діагоналізовні матриці та діагональна форма **26**
- 4.1 Теоретичні відомості 26
- 4.2 Основні типи задач 26
- 4.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 27
- 4.4 Приклади 28
- 4.5 Задачі теоретичного характеру 35
- 4.6 Задачі для самостійного розв'язання 37

5 Жорданова форма матриці **39**
- 5.1 Теоретичні відомості 39
- 5.2 Основні типи задач 40
- 5.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 40
- 5.4 Приклади 42
- 5.5 Задачі теоретичного характеру 45
- 5.6 Задачі для самостійного розв'язання 47

6 Жорданова форма матриць 2×2 **49**
- 6.1 Класифікація жорданових матриць розміру 2×2 49
- 6.2 Алгоритми зведення до Ж.Н.Ф. матриці 2×2 50
- 6.3 Приклади 50
- 6.4 Задачі для самостійного розв'язання 52

7 Жорданова форма матриць 3×3 **53**
- 7.1 Класифікація жорданових матриць розміру 3×3 53
- 7.2 Алгоритми зведення до Ж.Н.Ф. матриці 3×3 54
- 7.3 Приклади 56
- 7.4 Задачі для самостійного розв'язання 65

8 Жорданова форма матриць 4×4 **66**
8.1 Класифікація жорданових матриць розміру 4×4 . . . 66
8.2 Алгоритми зведення до Ж.Н.Ф. матриці 4×4 68
8.3 Приклади 72
8.4 Задачі для самостійного розв'язання 97

9 Мінімальний многочлен матриці **98**
9.1 Теоретичні відомості 98
9.2 Основні типи задач 99
9.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 99
9.4 Приклади 99
9.5 Задачі теоретичного характеру 101
9.6 Задачі для самостійного розв'язання 102

10 Інваріантні підпростори **103**
10.1 Теоретичні відомості 103
10.2 Основні типи задач 103
10.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 103
10.4 Приклади 104
10.5 Задачі теоретичного характеру 109
10.6 Задачі для самостійного розв'язання 109

11 Функції від матриць **111**
11.1 Теоретичні відомості 111
11.2 Основні типи задач 111
11.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач 112
11.4 Приклади 112
11.5 Задачі теоретичного характеру 119
11.6 Задачі для самостійного розв'язання 120

1 Вступ

Тема "Жорданова нормальна форма матриці" вивчається на механіко-математичному факультеті Київського університету імені Тараса Шевченка в курсі лінійної алгебри студентами першого курсу. Як правило, серед інших тем курсу лінійної алгебри ця тема найскладніша для сприйнятя, особливо з погляду набування практичних навичок тз знаходження жорданової форми. Брак часу не дозволяє довго зупинятись на розв'язанні однотипних задач на практичних заняттях, багато задач залишається для самостійного опрацювання студентами.

Даний методичний посібник має за мету повністю охопити основну частину практичних задач, які пропонуються до розв'язання під час вивчення теми "Жорданова нормальна форма". До всіх типових задач наведено алгоритми розв'язання та повністю розібрано принаймні по одній задачі кожного типу. Значну кількість задач запропоновано для самостійного розв'язання.

Матеріал посібника передбачає ознайомлення з усіма темами курсу лінійної алгебри, що вивчається в першому семестрі. Для додаткових теоретичних відомостей ми відсилаємо читача до [2]. Як основне джерело задач використовувались класичні збірки [1, 3, 4], хоч серед запропонованих задач зустрічаються й оригінальні.

Кожна глава (підтема) посібника складається з коротких теоретичних відомостей, списку основних типів задач, алгоритмів їх розв'язання, прикладів розв'язання та задач для самостійного опрацювання.

2 Характеристичний многочлен матриці

2.1 Теоретичні відомості

Нехай K позначає довільне поле. Надалі через E_n ми позначатимемо одиничну матрицю розміру $n \times n$. Нагадаємо, що одиничною називають квадратну матрицю, усі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, а всі позадіагональні елементи – нульові.

$$E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n}$$

Якщо розмір матриці E буде зрозумілим з контексту, ми часто будемо його опускати.

Розглянемо деяку квадратну матрицю $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.

Означення 2.1. *Характеристичним многочленом матриці A називається многочлен*

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Надалі ми часто будемо використовувати інтерпретацію матриць у термінах лінійних операторів. Нехай K^n позначає арифметичний векторний простір розмірності n над полем K. Зафіксуємо стандартну базу простору K^n, що складається з векторів $e_i = (0,\ 0, \dots, 0,\ 1,\ 0, \dots, 0)$ (одиничка стоїть на i-му місці). Тоді довільну матрицю $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ можна інтерпретувати як матрицю єдиного лінійного оператора $\varphi_A : K^n \to K^n$, що визначається умовами

$$\varphi_A(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

У такий спосіб встановлюється природна взаємно-однозначна відповідність між множиною $\mathcal{L}(K^n)$ лінійних операторів у просторі K^n та множиною $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Більше того, ця відповідність узгоджена з природними діями додавання операторів, множення оператора на число та суперпозиції операторів. А саме, додаванню операторів відповідає додавання матриць, множенню оператора на число відповідає множення матриці на число, а суперпозиції операторів відповідає множення матриць. Нагадаємо також, що при заміні базису в K^n, що задається матрицею переходу S (звичайно, невиродженою), матриця A лінійного оператора перетворюється у матрицю $S^{-1}AS$. Згідно з такою трактовкою усі задачі, що формулюються мовою матриць, можна переформулювати мовою лінійних операторів, і навпаки. Ми надалі дотримуватимемось в більшості матричних формулювань.

Основні властивості характеристичного многочлена зібрано в наступній теоремі:

Теорема 2.1. *1. Для довільної оборотної квадратної матриці* $S \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ *справедлива рівність* $\chi_{S^{-1}AS}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

2. $\deg \chi_A(\lambda) = n$.

3. $\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + d_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + d_n$, *де* $d_1 = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ *та* $d_n = \det A$.

4. $\chi_A(A) = 0$.

З першої властивості одразу випливає, що можна визначити характеристичний многочлен лінійного оператора, як характеристичний многочлен його матриці в будь-якій базі. Це визначення буде коректним, бо, насправді, не залежить від вибору бази, в якій виписується матриця оператора.

Характеристичний многочлен має дуже багато цікавих та корисних властивостей. Він буде основним нашим технічним знаряддям протягом всього курсу лінійної алгебри. Тож решту потрібних нам означень та властивостей ми наводитемо за необхідністю та доречністю.

2.2 Основні типи задач

Ми познайомились лише з (суто технічним) визначенням характеристичного многочлена матриці (лінійного оператора). Тож поки що можна визначити єдиний тип задач: Знаходження характеристичного многочлена матриці.

2.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 2.1. *Знаходження характеристичного многочлена матриці.*

Для знаходження характеристичного многочлена матриці необхідно:

- До всіх діагональних елементів матриці дописати вираз $-\lambda$.
- Обчислити визначник отриманої матриці. Для цього використовуються алгоритми, що вивчались у темі знаходження визначника матриці.

2.4 Приклади

Приклад 2.1. *Знайдіть характеристичний многочлен матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Доведення.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 \cdot 3 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

□

Приклад 2.2. *Знайдіть характеристичний многочлен матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Доведення.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (5-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) + 2 \cdot 6 \cdot (-4) + 4 \cdot 4 \cdot (-3) -$$
$$- 6 \cdot (-3) \cdot (5-\lambda) - (5-\lambda) \cdot 4 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 \cdot (-4-\lambda) =$$
$$= -(25 - 10\lambda + \lambda^2)(4+\lambda) - 48 - 48 + 18(5-\lambda) + 16(5-\lambda) - 8(-4-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda - 100 - 96 + 90 - 18\lambda + 112 - 8\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

□

Приклад 2.3. *Знайдіть характеристичний многочлен матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доведення.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Для знаходження цього визначника скористаємось формулою обчислення визначника блочно-трикутної матриці:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= ((2-\lambda)(-2-\lambda)-12)((-3-\lambda)(-1-\lambda)-4) = (\lambda^2-16)(\lambda^2+4\lambda-1) =$$
$$= \lambda^4 + 4\lambda^3 - 17\lambda^2 - 64\lambda + 16.$$

□

2.5 Задачі теоретичного характеру

Хоч ця початкова тема не дуже насичена різноманітними технічними задачами, проте в ній чимало задач теоретичного характеру. Розв'язання деяких з них ми пропонуємо до вашої уваги в цьому параграфі.

Приклад 2.4. *Доведіть, що квадратна матриця є виродженою тоді та тільки тоді, коли її характеристичний многочлен не містить вільного члена.*

Доведення. Ми знаємо, що умова невиродженості матриці A еквівалентна умові $\det A \neq 0$. З третього пункту теореми 2.1 випливає, що вільний член $\chi_A(\lambda)$ збігається з $\det A$. Це і доводить потрібне нам твердження. □

Зауваження. *Зауважимо, що пояснити згадану властивість многочлена $\chi_A(\lambda)$ досить просто. Насправді, вільний член довільного полінома $f(x)$ дорівнює $f(0)$ за теоремою Безу. Отже, вільний член $\chi_A(\lambda)$ дорівнює, за означенням $\chi_A(\lambda)$, ось чому:*

$$\chi_A(0) = \det(A - 0E) = \det(A).$$

Приклад 2.5. *Доведіть, що довільний многочлен $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ степеня n, зі старшим коефіцієнтом $(-1)^n$, є характеристичним многочленом деякої матриці $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.*

Доведення. За основною теоремою алгебри многочлен $f(\lambda)$ має рівно n комплексних коренів (з урахуванням кратності), скажімо $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$. Це означає, що

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda).$$

Розглянемо діагональну матрицю $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, на діагоналі якої стоять елементи $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$. Тоді, за визначенням, $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) = f(\lambda)$. □

Приклад 2.6. *Доведіть, що для довільних $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ виконується рівність $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.*

Доведення. Взагалі кажучи, ця задача складна. Проте при певному припущенні щодо матриць A та B вона стає досить простою. Отже, ми спочатку розв'яжемо простий її варіант. Припустимо, що принаймні одна з матриць A або B є оборотною. Нехай це буде, скажімо, матриця A. Тоді $BA = A^{-1}(AB)A$, і твердження задачі випливає з першого пункту теореми 2.1.

У загальному випадку треба досить сильно схитрувати. Давайте уявимо, що елементами матриць A та B є "невідомі" a_{ij} та b_{ij}, $i, j = 1, 2 \ldots, n$. Це означає, що ми розглядаємо поле раціональних функцій $L = K(a_{ij}, b_{ij}), i, j = 1, 2 \ldots, n$. У цьому полі визначники обох матриць є просто многочленами від своїх елементів, а, отже, не рівні нулю. Застосувавши попередній результат, ми отримуємо, що $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ в полі L. Але це просто означає, що $\chi_{AB}(\lambda)$ та $\chi_{BA}(\lambda)$ збігаються, як функції від a_{ij} та b_{ij}. Останнє означає, що рівність $\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$ виконується для довільних a_{ij} та b_{ij}, наприклад для довільних фіксованих елементів поля K. □

2.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. *Знайдіть характеристичні многочлени наступних матриць:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2. *Доведіть, що сумма діагональних елементів матриці $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ (так званий "слід" матриці A) збігається із сумою діагональних елементів матриці $S^{-1}AS$ для будь-якої оборотної матриці $S \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.*

Задача 2.3. *Доведіть, що характеристичний многочлен матриці дорівнює характеристичному многочлену транспонованої матриці.*

Задача 2.4. *Доведіть, що довільний многочлен* $f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ *степеня* n *та зі старшим коефіцієнтом* $(-1)^n$ *є характеристичним многочленом деякої матриці* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

3 Власні числа та власні вектори

3.1 Теоретичні відомості

Поняття власного числа та власного вектора є першоджерелом жорданової форми, крім того, це поняття змістовне над будь-яким полем і дозволяє розв'язувати значну кількість задач як теоретичного, так і практичного характеру. Тож розглянемо довільне поле K і довільну матрицю $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.

Означення 3.1. *Число $\lambda \in K$ називається власним (або характеристичним) числом матриці A, якщо існує ненульовий вектор $v \in K^n$ такий, що $Av = \lambda v$. У цьому випадку вектор v називається власним вектором матриці A з власним числом λ.*

Зауважимо, що за означенням власний вектор матриці обов'язково ненульовий, хоч нульовий вектор зручно деколи вважати власним з будь-яким власним числом.

Основні властивості власних чисел та векторів зібрано в наступній теоремі:

Теорема 3.1.
1. *Власними числами матриці A є корені її характеристичного многочлена і тільки вони.*
2. *Множина $V(\lambda, A)$ усіх власних векторів матриці A з фіксованим власним числом λ (враховуючи нульовий вектор, який можна вважати власним вектором з будь-яким власним числом) утворює підпростір в K^n, розмірність якого збігається з дефектом матриці $A - \lambda E$.*
3. *Базисом підпростору $V(\lambda, A)$ є фундаментальна система розв'язків (Ф.С.Р.) однорідної системи лінійних рівнянь (С.Л.Р.) з матрицею $A - \lambda E$.*
4. *$\dim V(\lambda, A)$ не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена.*
5. *Довільний набір власних векторів матриці A з попарно різними власними значеннями є лінійно незалежним.*

Ми одразу зауважимо, що властивість мати власні числа суттєво залежить від поля K. Одна й та сама матриця A, що розглядається над різними полями, може в одному випадку мати власні числа, а в іншому їх не мати. Так, наприклад, легко переконатись, що для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

маємо $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Якщо $K = \mathbb{R}$, тоді многочлен $\chi_A(\lambda)$ не має коренів в K, а отже, матриця A не має власних чисел (і власних векторів). З іншого боку, якщо $K = \mathbb{C}$, ми маємо два корені i та $-i$ характеристичного многочлена, і матриця A має нетривіальні підпростори $V(i, A)$ та $V(-i, A)$.

У випадку, коли власне число μ матриці A є кратним коренем многочлена $\chi_A(\lambda)$ кратності k, кажуть, що μ — власне число кратності k.

3.2 Основні типи задач

Тепер уже починає з'являтись певна різноманітність. Можна виділити такі основні типи задач з цієї теми:

1. Знаходження власних чисел матриці.
2. Знаходження власного підпростору матриці.
3. Знаходження всіх власних векторів матриці.

3.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 3.1. *Знаходження власних чисел матриці.*

Для знаходження власних чисел матриці A необхідно:

- Обчислити характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda)$ матриці A.
- Знайти всі різні корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ характеристичного многочлена. Саме вони і будуть шуканими власними числами.

Алгоритм 3.2. *Знаходження власних векторів матриці A, котрі відповідають власному числу μ (знаходження власного підпростору матриці A).*

Для знаходження власних векторів матриці A, що відповідають власному числу μ, необхідно:

- Обчислити матрицю $A(\mu) = A - \mu E$.
- Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з матрицею $A(\mu)$. Отримана фундаментальна система розв'язків є базисом власного підпростору $V(\mu, A)$.

Алгоритм 3.3. *Знаходження всіх власних векторів матриці A.*

Для знаходження всіх власних векторів матриці A необхідно:

- Використовуючи алгоритм 3.1, знайти всі власні числа матриці A.
- Для кожного власного числа μ матриці A, використовуючи алгоритм 3.2, знайти базис власного підпростору $V(\mu, A)$.

3.4 Приклади

Приклад 3.1. *Знайдіть власні числа матриці*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знайдемо спочатку характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Отримуємо $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Це і будуть власні числа матриці A. □

Приклад 3.2. *Знайдіть власні числа матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знайдемо спочатку характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda).$$

На цьому варто зупинитись. Нас, насправді, цікавить не сам явний вигляд характеристичного многочлена, а його корені. За теоремою Безу, корені характеристичного многочлена відповідають його лінійним дільникам. Отже, нам потрібно саме знайти розклад $\chi_A(\lambda)$ на лінійні множники. У даному випадку ми легко можемо вже зараз отримати лінійний множник $1-\lambda$. Отже,

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda).$$

Виносячи з другого множника λ, ми отримуємо

$$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - 2)\lambda.$$

Отже, за теоремою Безу, ми маємо три різні власні числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ та $\lambda_3 = 0$. □

Приклад 3.3. *Знайдіть власні числа матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен матриці A, одночасно розкладаючи його на множники:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= ((1-\lambda)^2 - 1)((3-\lambda)(4-\lambda) - 2) =$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda - 10) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-2) = \lambda(\lambda-2)^2(\lambda-5).$$

Отже, ми маємо три різні корені характеристичного многочлена, тобто, три різні власні числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ та $\lambda_3 = 5$. При цьому варто зауважити, що власне число $\lambda_2 = 2$ має кратність 2. □

Приклад 3.4. *Знайдіть базис власного підпростору з власним числом* 3 *для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що власне число нам указано в умові задачі, а отже, шукати його не потрібно. Першим кроком ми виписуємо матрицю $A - 3E$:

$$B = A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тепер треба розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь, матрицею якої є матриця B. Для цього зводимо нашу матрицю до нормальної трапецевидної форми елементарними перетвореннями рядків:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \{(-1/2) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \{[2] + (-3) * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут варто зупинитись та пояснити умовні позначення. Перше елементарне перетворення, що було зроблено, це множення першого рядка матриці на $-1/2$. Відповідне умовне позначення $\{(-1/2) * [1]\}$ виписано зліва від перетворюваної матриці. У наступній матриці до другого рядка ми додали перший, помножений на -3. Відповідне перетворення позначено $\{[2] + (-3) * [1]\}$.

Для того, щоб знайти Ф.С.Р. нашої системи, ми вибираємо першу зміну залежною, а другу — вільною. Приписавши до системи фіктивний рядок з вільною змінною, матимемо

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_2 \\ x_2 & = & x_2 \end{array} \right. ,$$

або ж у векторному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Звідси ми знаходимо, що Ф.С.Р. цієї однорідної С.Л.Р. складається з одного вектора, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор v_1 і утворює базис власного підпростору $V(3, A)$. $\square$

Зауваження. *Те, що ми спромоглися знайти ненульовий розв'язок нашої системи, свідчить про те, що число 3 дійсно є власним числом матриці A. Якби, розв'язуючи задачу, ми отримали, що наша система має лише нульовий розв'язок (відповідна Ф.С.Р. — порожня), ми б могли стверджувати, що число 3 не є власним числом A, тобто в умові задачі припущено помилку.*

Ми не рахували характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda)$, а отже, не можемо нічого певного сказати про кратність 3 як кореня характеристичного многочлена. Хіба що можна стверджувати, що вона не менша за одиницю. Стверджувати, що ця краність дорівнює одиниці, на основі того, що ми отримали єдиний власний вектор, не можна. Далі ми побачимо, що досить часто розмірність власного підпростору матриці, що відповідає деякому фіксованому власному числу, менша за кратність цього власного числа.

Приклад 3.5. *Знайдіть базис власного підпростору з власним числом 2 для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знову власне число нам задано в умові задачі. Тож, виписуємо матрицю $B = A - 2E$ і зводимо її до нормального трапецевидного вигляду елементарними перетвореннями:

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \{[2] + (-2) * [1]\}\{[3] + (-1) * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виписуємо отриману систему, вибравши x_1 та x_3 вільними змінними, та переписуємо її у векторному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже, Ф.С.Р. нашої системи, а з нею і базис $V(2, A)$ складаються з двох векторів, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 3.6. *Знайдіть усі власні числа та власні вектори матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку треба знайти власні числа. Для цього обчислюємо $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (4-\lambda)^2(-7-\lambda) - 90 - 90 + 12(7+\lambda) + 27(4-\lambda) + 25(4-\lambda) =$$
$$= -(16 - 8\lambda + \lambda^2)(7+\lambda) - 40\lambda + 112 = -\lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 1).$$

Отже, ми маємо два власні числа: $\lambda_1 = 0$ кратності 2 та $\lambda_2 = 1$ кратності 1.

Знаходимо базис $V(\lambda_1, A) = V(0, A)$. Для цього виписуємо матрицю $B_1 = A - \lambda_1 E = A$ та зводимо її до необхідного вигляду (через $\{[1]\leftrightarrow[2]\}$ позначено елементарне перетворення перестановки першого та другого рядків):

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \{[2] + (-1) * [1]\}\{[1]\leftrightarrow[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\{[2] + (-4) * [1]\}\{[3] + (-6) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \{(1/3) * [2]\} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix} \{[1] + 2 * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною і переписуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 &= 1/3x_3 \\ x_2 &= 2/3x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_3/3.$$

Отже, базис власного підпростору $V(0, A)$ складається з одного вектора, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо базис $V(\lambda_2, A) = V(1, A)$. Для цього виписуємо матрицю $B_1 = A - \lambda_1 E = A - E$ та зводимо її до необхідного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \{[3] + (-1) * [2]\}\{[1] \leftrightarrow [3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -8 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\{[2] + (-5) * [1]\}\{[3] + (-3) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\{(1/3) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \{[1] + 2 * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною і переписуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже, базис власного підпростору $V(1, A)$ також складається з одного вектора, наприклад,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 3.7. *Знайдіть усі власні числа та власні вектори матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку треба знайти власні числа. Для цього обчислюємо $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4 - \lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(-4 - \lambda)(5 - \lambda) +$$

$$+ 180 + 28(-4 - \lambda) + 5(5 - \lambda) = -(16 - \lambda^2)(5 - \lambda) - 33\lambda + 93 =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13).$$

Тут варто зупинитись. Ми вже отримали одне власне число $\lambda_1 = 1$. Решта власних чисел — це корені многочлена $\lambda^2 - 4\lambda + 13$. Але цей квадратний тричлен має від'ємний дискримінант -36. Це означає, що наявність коренів цього многочлена істотно залежить від поля K. Якщо $K = \mathbb{R}$, многочлен $\lambda^2 - 4\lambda + 13$ не має коренів. Якщо $K = \mathbb{C}$, многочлен $\lambda^2 - 4\lambda + 13$ має два корені $\lambda_2 = 2 + 3i$ та $\lambda_3 = 2 - 3i$. Ми розв'яжемо задачу в обох випадках.

Спочатку — простіший випадок $K = \mathbb{R}$. Ми маємо єдине власне число $\lambda_1 = 1$. Знаходимо базис $V(\lambda_1, A) = V(1, A)$. Для цього випишуємо матрицю $B_1 = A - \lambda_1 E = A - E$, та зводимо її до необхідного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \{[1] \leftrightarrow [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 3 & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \{[2] + (-3) * [1]\}$$
$$\{[3] + 4 * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$
$$\{(1/10) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \{[1] + 5 * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною і переписуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже, базис власного підпростору $V(1, A)$ складається з одного вектора, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку $K = \mathbb{R}$ розв'зання закінчено.

Розглянемо тепер випадок $K = \mathbb{C}$. Звичайно, власне число $\lambda_1 = 1$ залишається, і залишається базис $V(1, A)$, що складається з вищенаведеного вектора v_1. Ми ж переходимо до $\lambda_2 = 2 + 3i$. Випишуємо матрицю $B_1 = A - \lambda_2 E = A - (2 + 3i)E$ та зводимо її до необхідного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 2-3i & -5 & 7 \\ 1 & -6-3i & 9 \\ -4 & 0 & 3-3i \end{pmatrix} \{[1]\leftrightarrow[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6-3i & 9 \\ 2-3i & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$\{[2]+(-2+3i)*[1]\}\{[3]+4*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6-3i & 9 \\ 0 & 16-12i & -11+27i \\ 0 & -24-12i & 39-3i \end{pmatrix}$$

$$\{(1/3)*[3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6-3i & 9 \\ 0 & 16-12i & -11+27i \\ 0 & -8-4i & 13-i \end{pmatrix} \{[2]+(1-2i)*[3]\} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6-3i & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8-4i & 13-i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6-3i & 9 \\ 0 & -8-4i & 13-i \end{pmatrix} \{[1]+(-3/4)*[2]\}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3+3i}{4} \\ 0 & -8-4i & 13-i \end{pmatrix} \left\{(-8-4i)^{-1}*[2]\right\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3+3i}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-5+3i}{4} \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною і переписуємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & ((3-3i)/4)x_3 \\ x_2 & = & ((5-3i)/4)x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array} \right. , \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix} x_3/4.$$

Отже, базис власного підпростору $V(2+3i, A)$ складається з одного вектора, наприклад,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Нарешті розглянемо $\lambda_3 = 2-3i$. Виписуємо матрицю $B_1 = A -$

$\lambda_3 E = A - (2-3i)E$, та зводимо її до необхідного вигляду:

$$\begin{pmatrix} 2+3i & -5 & 7 \\ 1 & -6+3i & 9 \\ -4 & 0 & 3+3i \end{pmatrix} \{[1]\leftrightarrow[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 2+3i & -5 & 7 \\ -4 & 0 & 3+3i \end{pmatrix}$$

$$\{[2]+(-2-3i)*[1]\}\{[3]+4*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & 16+12i & -11-27i \\ 0 & -24+12i & 39+3i \end{pmatrix}$$

$$\{(1/3)*[3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & 16+12i & -11-27i \\ 0 & -8+4i & 13+i \end{pmatrix} \{[2]+(1+2i)*[3]\} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8+4i & 13+i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -6+3i & 9 \\ 0 & -8+4i & 13+i \end{pmatrix} \{[1]+(-3/4)*[2]\}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3-3i}{4} \\ 0 & -8+4i & 13+i \end{pmatrix} \left\{(-8+4i)^{-1}*[2]\right\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3-3i}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-5-3i}{4} \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною і переписуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 &= ((3+3i)/4)x_3 \\ x_2 &= ((5+3i)/4)x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix} x_3/4.$$

Отже, базис власного підпростору $V(2-3i, A)$ складається з одного вектора, наприклад,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

□

3.5 Задачі теоретичного характеру

Теоретичних задач на цю тему дуже багато. Ми наведемо розв'язання тих задач, що, на наш погляд, найбільш суттєво пояснюють властивості власних чисел та векторів і найширше застосовуються в подальшому курсі.

Приклад 3.8. *Нехай A та B позначають дві довільні комутуючі матриці (тобто $AB = BA$). Припустимо, що деяке $\lambda \in \mathbb{C}$ є власним числом матриці A. Доведіть, що простір $V(\lambda, A)$ інваріантний відносно B (тобто $BV(\lambda, A) \subset V(\lambda, A)$).*

Доведення. Нехай $v \in V(\lambda, A)$, $v \neq 0$. Це означає, що $Av = \lambda v$. Тоді

$$A(Bv) = (AB)v = (BA)v = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda Bv.$$

Тобто Bv є власним вектором оператора A з власним числом λ, звідки $Bv \in V(\lambda, A)$. Остаточно $BV(\lambda, A) \subset V(\lambda, A)$. □

Приклад 3.9. *Нехай $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ — невироджена матриця. Доведіть, що матриці A та A^{-1} мають одні й ті самі власні вектори.*

Доведення. Враховуючи симетрію $(A^{-1})^{-1} = A$, нам досить довести, що довільний власний вектор v матриці A є також власним вектором матриці A^{-1}. Нехай $Av = \lambda v$. Оскільки A — невироджена матриця, ми маємо $\lambda \neq 0$. Отже,

$$A^{-1}v = A^{-1}\lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}A^{-1}(\lambda v) = \\ = \lambda^{-1}A^{-1}(Av) = \lambda^{-1}(A^{-1}A)v = \lambda^{-1}Ev = \lambda^{-1}v.$$

Тобто v дійсно є власним вектором оператора A^{-1} з власним числом λ^{-1}. □

Приклад 3.10. *Знайдіть всі власні числа та власні вектори матриці $A \in \mathrm{Mat}_{8\times 8}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{8}$, для якої $a_{ij} = 0$, якщо $i + j$ непарне та $a_{ij} = 1$, якщо $i + j$ парне.*

Доведення. Шукати характеристичний многочлен у цьому випадку не дуже вже й хочеться. По-перше, це неабияк важко — рахувати визначник восьмого порядку. По-друге, навіть обчисливши його, ми не маємо впевненості, що зможемо знайти власні числа, бо формул для обчислення коренів рівняння восьмого порядку не існує. Отже, розв'язувати задачу треба якось інакше. Найкраще — чи не спробувати просто вгадати власні вектори.

Подивимось спочатку на ранг матриці. Окремо парні і окремо непарні рядки нашої матриці однакові, а перший та другий рядки — лінійно незалежні. Звідси легко отримуємо, що ранг A дорівнює 2, тобто ядро відповідного лінійного оператора має розмірність $8 - 2 = 6$. Тобто, ми можемо одразу знайти цілих 6 лінійно незалежних власних векторів із власним значенням 0. Знайдемо їх. Для цього нам треба знайти Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виберемо за вільні змінні $x_3, \ldots, x_8$ та виразимо решту через них:

$$\begin{cases} x_1 &= -x_3 - x_5 - x_7 \\ x_2 &= -x_4 - x_6 - x_8 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= x_4 \\ x_5 &= x_5 \\ x_6 &= x_6 \\ x_7 &= x_7 \\ x_8 &= x_8 \end{cases}.$$

Тепер перепишемо систему у векторному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_6 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_7 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_8.$$

Звідси знаходимо такий базис $V(0, A)$ (для економії місця ми запишемо знайдені базисні вектори в рядок):

$$v_1 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0); v_2 = (0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0);$$

$$v_3 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0); v_4 = (0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0);$$
$$v_5 = (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0); v_6 = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Ми вже знайшли шість власних векторів (лінійно незалежних). Якщо нам пощастить, і ми зможемо вгадати ще два, ми стверджуватимемо, що більше їх бути і не може. Але ті два вектори, що залишились, вгадати дуже легко: це будуть вектори

$$v_7 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \text{ та } v_8 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0),$$

що є власними векторами A з власним числом 4. Їх лінійна незалежність очевидна, а лінійна незалежність з попередніми випливає з теореми 3.1. Останнє і завершує розв'язання задачі. □

Приклад 3.11. *Знайдіть власні числа матриці $A = B^T B$, де $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — матриця-рядок.*

Доведення. У цій задачі власні вектори також треба спробувати вгадати. По-перше, оскільки матриці B та B^T мають ранг ≤ 1 (B — матриця-рядок), ми отримуємо, що ранг A не перевищує 1. Зрозуміло, що у випадку, коли $b_i = 0$ для всіх i, матриця A нульова, і ми маємо єдине власне число 0 (кратності n). Якщо ж хоча б одне з b_i відмінне від нуля, матриця A є ненульовою, а тому має ранг 1. З останнього одразу випливає, що при $n > 1$ число 0 є власним числом матриці (кратності, щонайменше, $n-1$). Давайте подивимось, чи є у матриці A інші власні числа.

Ми знаємо, що сума всіх власних чисел матриці дорівнює сліду матриці (теорема 2.1), тобто сумі всіх її діагональних елементів. Останнє означає, що в нашому випадку сумма всіх власних чисел матриці A дорівнює $S = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Але ми маємо принаймні $n-1$ власне число 0. Отже, якщо $S \neq 0$, власне число 0 має кратність рівно $n-1$, і є ще одне власне число — S кратності 1. Якщо ж $S = 0$, тоді 0 — єдине власне число нашої матриці кратності n. □

Приклад 3.12. *Нехай матриця A^2 має власне число λ^2. Доведіть, що матриця A має власним числом λ або $-\lambda$.*

Доведення. Нехай $v \neq 0$ — власний вектор матриці A з власним числом λ^2. Тоді $(A^2 - \lambda^2 E)v = (A^2 - \lambda^2 E^2)v = 0$. Але

$$(A^2 - \lambda^2 E^2) = (A - \lambda E)(A + \lambda E),$$

і ми можемо записати $(A-\lambda E)(A+\lambda E)v = 0$. Якщо $(A+\lambda E)v = 0$, тоді v — власний вектор A з власним числом $-\lambda$. Якщо ж $(A+\lambda E)v = w \neq 0$, тоді $(A-\lambda E)w = 0$, і w — власний вектор A з власним числом λ. □

3.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. *Знайдіть власні числа матриць*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.2. *Знайдіть базис власного підпростору з власним числом* 7 *для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.3. *Знайдіть базис власного підпростору з власним числом* 0 *для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.4. *Знайдіть базис власного підпростору з власним числом 3 для матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.5. *Знайдіть усі власні числа та власні вектори матриць*

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.6. *Знадіть усі власні числа та власні вектори матриці* $A \in \mathrm{Mat}_{8\times 8}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{8}$, *для якої* $a_{ij} = 1$, *якщо* $i + j$ *непарне, та* $a_{ij} = 0$, *якщо* $i + j$ *парне.*

Задача 3.7. *Знадіть усі власні числа та власні вектори матриці оператора диференціювання в* $K[x]_n$.

Задача 3.8. *Знадіть усі власні числа матриці оператора* $f(x) \mapsto f(ax + b)$ *в* $K[x]_n$ *(*a, b *— фіксовані числа).*

Задача 3.9. *Доведіть, що для довільного набору попарно комутуючих операторів існує спільний власний вектор.*

Задача 3.10. *Доведіть, що власні числа матриці* A^n *дорівнюють (з урахуванням кратності)* n*-м степеням власних чисел матриці* A.

Задача 3.11. *Доведіть, що власні числа матриць* A *та* A^T *збігаються (з урахуванням кратності).*

4 Діагоналізовні матриці та діагональна форма

4.1 Теоретичні відомості

Нехай A позначає деяку квадратну матрицю розміру $n \times n$ над полем K.

Означення 4.1. *Говорять, що матриця A зводиться до діагональної форми (є діагоналізовною), якщо існує така невироджена матриця $S \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, що матриця $S^{-1}AS$ є діагональною. У цьому випадку матрицю S називають матрицею переходу до діагональної форми.*

Мовою лінійних операторів діагоналізовність матриці просто означає, що відповідний лінійний оператор матиме діагональну матрицю після деякої заміни бази в просторі K^n. Крім того, треба зауважити, що матриця S, про яку згадувалося у визначенні, взагалі кажучи, визначена не однозначно. Основні властивості діагоналізовних матриць та умови діагоналізовності зібрано в наступній теоремі:

Теорема 4.1.
1. *Діагональна форма квадратної діагоналізовної матриці визначена однозначно з точністю до перестановки діагональних елементів.*
2. *Якщо $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники та не має кратних коренів, тоді матриця A є діагоналізовною.*
3. *Для того, щоб матриця A була діагоналізовною, необхідно і достатньо щоб, по-перше, многочлен $\chi_A(\lambda)$ розкладався на лінійні множники і, по-друге, для довільного власного числа μ кратність μ як кореня многочлена $\chi_A(\lambda)$ дорівнювала розмірності підпростору $V(\mu, A)$.*

Згідно з останнім пунктом теореми 4.1 діагоналізовність матриці суттєво залежить від можливості розкладу характеристичного многочлена на лінійні множники. Ми вже добре знаємо, що розклад многочлена на множники суттєво залежить від поля K. Отже, діагоналізовність матриці так само суттєво залежить від поля K. Тобто одна й та сама матриця, розглянута над різними полями, може бути діагоналізовною в одному випадку та недіагоналізовною в іншому.

Легко бачити, що властивість бути діагоналізовною не залежить від перевибору базису в просторі. Отже, має сенс говорити про діагоналізовні лінійні оператори, тобто оператори, що мають діагональну матрицю в деякому базисі. Іншими словами, це оператори, для яких існує базис, що складається з власних векторів.

4.2 Основні типи задач

Існує декілька основних типів задач про діагоналізовні матриці, а саме:

1. Перевірити, чи буде дана матриця A діагоналізовною.
2. Знайти діагональну форму матриці A.
3. Звести матрицю A до діагонального вигляду, тобто знайти її діагональну форму та відповідну матрицю переходу.

4.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 4.1. *Перевірка матриці A на діагоналізовність.*

Для перевірки матриці A на діагоналізовність необхідно:

- Обчислити характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda)$ матриці A.
- Спробувати розкласти $\chi_A(\lambda)$ на лінійні множники. Якщо це неможливо, зробити висновок, що матриця A не є діагоналізовною.
- Для кожного власного числа μ, кратність якого більша 1, знайти дефект матриці $A - \mu E$. Якщо для кожного такого власного числа отриманий дефект збігається з кратністю μ в $\chi_A(\lambda)$, матриця A є діагоналізовною. Якщо хоча б для одного μ отриманий дефект буде менше кратності μ в $\chi_A(\lambda)$, матриця A не є діагоналізовною.

Алгоритм 4.2. *Знаходження діагональної форми матриці A.*

Для знаходження діагональної форми матриці A необхідно:

- Перевірити матрицю A на діагоналізовність, використовуючи алгоритм 4.1.
- Якщо матриця A є діагоналізовною, тоді виписати її діагональну форму наступним чином: Виписати діагональну матрицю, що містить на діагоналі власні числа матриці A, причому кожне власне число зустрічається стільки разів, яка його кратність.

Алгоритм 4.3. *Зведення матриці A до діагонального вигляду.*

Для зведення матриці A до діагонального вигляду необхідно:

- Перевірити матрицю A на діагоналізовність, використовуючи алгоритм 4.1.
- Якщо матриця A є діагоналізовною, тоді знайти всі власні вектори матриці A, використовуючи алгоритм 3.3.
- Діагональна форму A_d матриці A та матриця S виписуються узгоджено в такий спосіб: починаючи з лівого верхнього кутка по діагоналі в матрицю A_d виписується перше власне число стільки разів, яка його кратність. Одночасно, починаючи зліва, в матрицю B по стовпчиках виписуються координати знайдених векторів, які є базисом власного підпростору матриці A, що відповідає першому власному числу. Потім усе продовжується для другого власного числа, для третього власного числа і так далі.

4.4 Приклади

Приклад 4.1. *Перевірте на діагоналізовність матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2.$$

Отже, $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники і ми маємо єдине власне число $\lambda_1 = 0$ кратності 2.

Проте матриця

$$A - 0E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix},$$

очевидно, має дефект не більший за одиницю, оскільки є ненульовою і має розмір 2×2. Звідси ми отримуємо, що дефект цієї матриці менше за кратність 0 як кореня $\chi_A(\lambda)$. Отже, A не є діагоналізовною. $\square$

Приклад 4.2. *Перевірте на діагоналізовність матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3+8+8-3\cdot 4\cdot(1-\lambda) =$$

$$= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 4 + 12\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5.$$

Легко бачити, що -1 є коренем цього многочлена, отже

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5).$$

Розв'язавши квадратне рівняння, знаходимо його корені -1 та 5. Звідси $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$. Отже, $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники і ми маємо два власні числа: $\lambda_1 = -1$ кратності 2 та $\lambda_2 = 5$ кратності 1.

Тепер нам необхідно знайти дефект матриці $A-(-1)E$. Маємо

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці $A+E$ дорівнює 1, а її дефект дорівнює $3-1=2$. Ми бачимо, що він збігається з кратністю власного числа -1 в $\chi_A(\lambda)$. Це означає, що матриця A є діагоналізовною. $\square$

Приклад 4.3. *Знадіть діагональну форму матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((1-\lambda)^2 - 4) \times ((2-\lambda)^2 - 4) =$$
$$= (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-4)\lambda.$$

Отже, $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники і ми маємо чотири різні власні числа $\lambda_1 = -1$ кратності 1, $\lambda_2 = 3$ кратності 1, $\lambda_3 = 4$ кратності 1 та $\lambda_4 = 0$ кратності 1. Згідно з достатньою умовою діагоналізовності (другий пункт теореми 4.1) матриця A є діагоналізовною.

Для того, щоб виписати діагональну форму B матриці A, ми просто виписуємо дігональну матрицю розміру 4×4, на діагональ якої по черзі вписуємо власні числа матриці A (тут не треба враховувати кратність, тому що кратність усіх власних чисел нашої матриці 1). Отже, ми пишемо число -1 у діагональну клітинку першого рядка, число 3 у діагональну клітинку другого рядка, число 4 у діагональну клітинку третього рядка і число 0 у діагональну клітинку останнього, четвертого рядка. Маємо таку відповідь:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 4.4. *Знайдіть діагональну форму матриці*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((-1-\lambda)^2 - 1)^2 = (\lambda^2 + 2\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda+2)^2.$$

Отже, $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники і ми маємо два власні числа: $\lambda_1 = 0$ кратності 2 та $\lambda_2 = -2$ кратності 2. Обидва власні числа мають кратність, більшу за 1, а тому необхідно підрахувати дефекти відповідних матриць. Для $\lambda_1 = 0$ маємо:

$$A - 0E = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг отриманої матриці, очевидно, дорівнює 2, тобто її дефект дорівнює $4 - 2 = 2$. Це збігається з кратністю λ_1 в $\chi_A(\lambda)$.

Для $\lambda_2 = -2$ маємо:

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \{[2] + 1 * [1]\}$$

$$\{[3] + 1 * [1]\}\{[4] + 1 * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \{[3] + (-1) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг отриманої матриці, очевидно, дорівнює 3, тобто її дефект дорівнює $4 - 3 = 1$. Це менше ніж кратність λ_2 в $\chi_A(\lambda)$. Згідно з критерієм діагоналізовності (третій пункт теоремй 4.1) матриця A не є діагоналізовною. Отже, говорити про її діагональну форму не можна. Постановка задачі не є корректною. $\square$

Приклад 4.5. *Знайдіть діагональну форму матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = ((3-\lambda)^2 - 4)\cdot$$

$$\cdot((2-\lambda)^2 - 1) = (\lambda^2 - 6\lambda + 5)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5)(\lambda - 3).$$

Отже, $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники і ми маємо три власні числа: $\lambda_1 = 1$ кратності 2, $\lambda_2 = 5$ кратності 1 та $\lambda_3 = 3$ кратності 1. Перше власне число має кратність 2, а тому необхідно підрахувати дефект матриці $A - \lambda_1 E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг отриманої матриці, очевидно, дорівнює 2, тобто її дефект дорівнює $4 - 2 = 2$. Це збігається з кратністю λ_1 в $\chi_A(\lambda)$. Отже, матриця A є діагоналізовною.

Для того, щоб виписати діагональну форму B матриці A, ми просто виписуємо дігональну матрицю розміру 4×4, на діагональ якої по черзі виписуємо власні числа матриці A, пам'ятаючи про те, що власне число $\lambda_1 = 1$ має кратність 2, а тому його треба повторити двічі. Маємо таку відповідь:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 4.6. *Зведіть до діагонального вигляду матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знаходимо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = ((1-\lambda)^2 - 4)\cdot$$

$$\cdot((3-\lambda)^2 - 16) = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)(\lambda^2 - 6\lambda - 7) =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-7) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)(\lambda-7).$$

Отже, $\chi_A(\lambda)$ розкладається на лінійні множники і ми маємо три власні числа: $\lambda_1 = -1$ кратності 2, $\lambda_2 = 3$ кратності 1 та $\lambda_3 = 7$ кратності 1. Перше власне число має кратність 2, а тому необхідно підрахувати дефект матриці $A - \lambda_1 E$:

$$A + E = A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг отриманої матриці, очевидно, дорівнює 2, тобто її дефект дорівнює $4-2=2$. Це збігається з кратністю λ_1 в $\chi_A(\lambda)$. Отже, матриця A є діагоналізовною.

Тепер нам треба знайти всі власні вектори матриці A. Починаємо з $\lambda_1=-1$. Ми вже обчислили, що

$$A+E \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \{(1/4)*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\{[1]+1*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \{(1/2)*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_2 та x_3 вільними змінними, виражаємо решту змінних через вільні та записуємо С.Л.Р. у векторному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 &= -x_2-x_3 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -x_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже, база $V(-1,A)$ складається з двох векторів (стільки, яка кратність -1 як кореня $\chi_A(\lambda)$), наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Переходимо до $\lambda_2=3$. Маємо:

$$A-3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \{[2]+1*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\{(1/2)*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \{[1]+(-1)*[2]\}\{(-1/4)*[3]\}$$
$$\{(-1/4)*[4]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \{[2]+1*[3]\}$$
$$\{[2]+(-1)*[4]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{(-1/2)*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_2 вільною змінною, виражаємо решту змінних через неї та записуємо С.Л.Р. у векторному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, база $V(3, A)$ складається з одного вектора (стільки, яка кратність 3 як кореня $\chi_A(\lambda)$), наприклад,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

І, нарешті, $\lambda_3 = 7$. Маємо:

$$A - 7E = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \{[3] + 1 * [4]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \{(1/4) * [4]\} \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{[1] + (-1) * [4]\}\{[2] + (-1) * [4]\} \mapsto \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{[1] + 3 * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \{(-1/16) * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \{[2] + 6 * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{(1/2) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_4 вільною змінною, виражаємо решту змінних через неї та записуємо С.Л.Р. у векторному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Отже, база $V(7, A)$ складається з одного вектора (стільки, яка кратність 7 як кореня $\chi_A(\lambda)$), наприклад,

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Діагональна форма B матриці A та матриця переходу S будуються так: в матрицю B по діагоналі, починаючи з лівого верхнього кутка, виписуються власні числа -1, -1, 3, 7. У матрицю S по стовпчиках виписуються зліва направо координати знайдених нами векторів v_1, v_2, v_3, v_4. При цьому узгодженість полягає в тому, що вектор v_1 є власним вектором з власним числом -1 (вектор v_1 виписаний у першому стовпчику матриці S, а в першому стовпчику матриці B стоїть його власне число -1). Вектор v_2 є власним вектором з власним числом -1, лінійно незалежним з v_1 (вектор v_2 виписаний у другому стовпчику матриці S, а в другому стовпчику матриці B стоїть його власне число -1). Вектор v_3 є власним вектором з власним числом 3, він виписаний у третьому стовпчику матриці S, а в третьому стовпчику матриці B стоїть його власне число 3. Нарешті вектор v_4 є власним вектором з власним числом 7, він виписаний у четвертому стовпчику матриці S, а в четвертому стовпчику матриці B стоїть його власне число 7. Остаточно ми отримуємо таку відповідь:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 4.7. *Зведіть до діагонального вигляду матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Ця матриця вже траплялась нам у прикладі 3.7. Отже, ми скористаємося результатами цього прикладу. По-перше, згадаймо, що $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$. Розкладність цього многочлена на лінійні множники залежить від вибору поля K. Якщо $K = \mathbb{R}$, тоді квадратний дільник $\lambda^2 - 4\lambda + 13$ многочлена $\chi_A(\lambda)$ не має коренів у $\mathbb{R}$, а отже, многочлен $\chi_A(\lambda)$ не розкладається над $\mathbb{R}$ на лінійні множники. Це означає, що матриця A не є діагоналізовною над $\mathbb{R}$.

Тепер розглянемо випадок $K = \mathbb{C}$. Тоді $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - (2 + 3i))(\lambda - (2 - 3i))$. Многочлен розклався на лінійні множники, і всі власні числа мають кратність 1. Отже, матриця A є діагоналізовною над $\mathbb{C}$. Ми вже обчислювали, що власні числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ та $\lambda_3 = 2 - 3i$ мають власні вектори

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

відповідно. Отже, діагональна форма B матриці A та матриця переходу S матимуть вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 3-3i & 3+3i \\ 2 & 5-3i & 5+3i \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

4.5 Задачі теоретичного характеру

Приклад 4.8. *Доведіть, що добуток двох довільних діагоналізовних матриць не обов'язково буде діагоналізовною матрицею.*

Доведення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно $AB = C$ та матриця A є діагоналізовною. Підрахуємо характеристичні многочлени матриць B та C:

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Отже, матриця B є діагоналізовною, бо її характеристичний многочлен розкладається на лінійні множники та не має кратних коренів.

$$\chi_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} == \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2.$$

Крім того, ранг матриці C, очевидно, ненульовий. Отже, C не є діагоналізовною матрицею. □

Приклад 4.9. *Матриця A є діагоналізовною. Доведіть, що матриця обмеження лінійного оператора, що відповідає A на довільний інваріантний підпростір, є діагоналізовною.*

Доведення. Нехай φ_A — лінійний оператор, що відповідає матриці A. Виберемо деякий базис в інваріантоному підпросторі та продовжимо його до базису всього простору. Тоді матриця φ_A набуде блочнотрикутоного вигляду, причому по діагоналі будуть стояти: матриця A_1 обмеження та матриця A_2 індукованого оператора у факторпросторі. Очевидно, що $\chi_A(\lambda)$ є добутком характеристичних многочленів цих двох операторів. Припустимо, що матриця обмеження не є діагоналізовною. Це означає, що для деякого власного числа μ дефект матриці $A_1 - \mu E$ дорівнює k і строго менше за кратність l числа μ як кореня $\chi_{A_1}(\lambda)$. Нехай t — повна кратність μ як кореня $\chi_A(\lambda)$. Тоді дефект матриці $A_2 - \mu E$ не може перевищувати $t - l$, тобто дефект матриці $A - \mu E$ не може перевищувати $k + (t - l) < t$. Отже, матриця A не може бути діагоналізовною. □

Приклад 4.10. *Нехай A та B позначають дві діагоналізовні матриці. Припустимо, що $AB = BA$. Доведіть, що ці матриці мають спільний власний базис, тобто існує невироджена матриця S така, що $S^{-1}AS$ та $S^{-1}BS$ діагональні.*

Доведення. Розглянемо власний підпростір $V(\lambda, A)$, де λ — деяке власне число матриці A. Оскільки A — діагоналізовна, розмірність $V(\lambda, A)$ дорівнює кратності λ як кореня характеристичного многочлена матриці A. Оскільки $AB = BA$, то $BV(\lambda, A) \subset B(\lambda, A)$ (приклад 3.8). Розглянемо обмеження B на $V(\lambda, A)$. Згідно з попереднім прикладом це обмеження є діагоналізовним оператором. Отже, існує власний базис для обмеження в $V(\lambda, A)$. Вибравши такий базис в усіх власних підпросторах матриці A, ми отримаємо спільний власний базис для матриць A та B, оскільки сума кратностей власних чисел в характеристичному многочлені матриці A дорівнює сумі розмірностей відповідних власних підпросторів, тому що матриця A є діагоналізовною. □

Приклад 4.11. *Нехай характеристичний многочлен матриці A розкладається на лінійні множники та не має кратних коренів. Доведіть, що існує вектор $v \in K^n$ такий, що множина векторів $\{A^k v \,|\, k \geq 0\}$ породжує K^n. Спростуйте це твердження у випадку, коли A діагоналізовна, але має власні числа кратності більше за* 1.

Доведення. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — власні числа матриці A. За умовою їх рівно n штук і всі вони різні. Виберемо для довільного $1 \leq i \leq n$ власний вектор v_i з власним числом i. Тоді $\{v_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ є базою K^n, оскільки це набір власних векторів з різними власними значеннями, а отже, він лінійно незалежний. Залишилось зауважити, що їх рівно n штук. Розглянемо вектор $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Для $0 \leq i \leq n-1$ маємо

$$A^i v = \lambda_1^i v_1 + \lambda_2^i v_2 + \cdots + \lambda_n^n v_n.$$

Тепер лінійна незалежність системи $\{A^i v \,|\, 0 \leq i \leq n-1\}$ випливає з властивості визначника Вандермонда. Отже, вектори $\{A^i v \,|\, 0 \leq i \leq n-1\}$ утворюють базу простору K^n, оскільки вони лінійно незалежні і їх рівно n штук. Це доводить перше твердження.

Для доведення другого виберемо базу $B = \{v_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ простору K^n, в якій матриця A зводиться до діагонального вигляду. За умови задачі, можна вважати, що вектори v_1 та v_2 мають спільне власне число μ. Нехай $v \in K^n$. Тоді $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Крім того, $A^i v = \mu^i a_1 v_1 + \mu^i a_2 v_2 + \cdots + \mu_n^i a_n v_n$. Виберемо довільні n натуральних чисел $i_1, \ldots, i_n$ і розглянемо матрицю коефіцієнтів розкладу $A^{i_j} v$, $1 \le j \le n$ за базою B (виписаних, як завжди, в стовпчик). У цій матриці перші два рядки будуть пропорційні, а тому сама матриця буде виродженою. Отже, жодні n елементів з множини $\{A^k v \,|, k \ge 0\}$ не утворюють базу простору K^n. Якби якийсь їх набір був системою твірних цього простору, то з нього завжди можна було б вибрати базу (мінімальну системи твірних). Оскільки базу вибрати не можна, то весь набір $\{A^k v \,|, k \ge 0\}$ не є системою твірних K^n. □

4.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. *Перевірте на діагоналізовність матриці*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.2. *Знайдіть діагональну форму матриць*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.3. *Зведіть до діагонального вигляду матриці*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.4. *Відомо, що характеристичний многочлен матриці A розкладається на лінійні множники та не має кратних коренів. Відомо також, що $AB = BA$. Доведіть, що B — діагоналізовна.*

Задача 4.5. *Доведіть, що довільний многочлен від діагоналізовної матриці є діагоналізовною матрицею.*

Задача 4.6. *Доведіть, що сума двох діагоналізовних матриць не обов'язково є діагоналізовною матрицею.*

Задача 4.7. *Яку алгебраїчну структуру утворюють усі діагоналізовні матриці?*

Задача 4.8. *Яку алгебраїчну структуру утворюють усі діагоналізовні матриці, що комутують із фіксованою діагоналізовною матрицею A?*

Задача 4.9. *Яку алгебраїчну структуру утворюють усі діагоналізовні матриці, що комутують з фіксованою діагоналізовною матрицею A, характеристичний многочлен якої не має кратних коренів?*

5 Жорданова форма матриці

5.1 Теоретичні відомості

Упродовж вивчення жорданової форми через K ми позначатимемо поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел, хоча всі результати справедливі над довільним алгебраїчно замкненим полем нульової характеристики.

Означення 5.1. *Для $k \in \mathbb{N}$ та $\lambda \in \mathbb{C}$, клітиною Жордана $\mathbb{J}_k(\lambda)$ ми називатимемо елемент з $\mathrm{Mat}_{k\times k}(K)$, що має наступний вигляд:*

$$\mathbb{J}_k(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{k}.$$

Означення 5.2. *Кореневим підпростором матриці A, що відповідає власному числу λ, називається множина всіх тих векторів v з K^n, для яких $(A - \lambda E)^n v = 0$.*

Означення 5.3. *Ланцюжковим базисом кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ, називається такий його базис v_{ij}, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le p_i$, для якого $(A - \lambda E)v_{ij} = v_{i\,j-1}$ та $(A - \lambda E)v_{i1} = 0$.*

Властивості кореневих підпросторів та ланцюжкових баз описуються в наступній теоремі:

Теорема 5.1.
1. *Розмірність кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ, збігається з кратністю λ.*
2. *У кожному кореневому підпросторі існує ланцюжковий базис.*
3. *Кількість ланцюжків фіксованої довжини в довільних двох ланцюжкових базисах одного й того ж самого кореневого підпростору однакова.*
4. *Кількість ланцюжків у довільному ланцюжковому базисі кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ, дорівнює розмірності підпростору $V(\lambda, A)$.*

5. *Кількість ланцюжків довжини не менше ніж i у довільному ланцюжковому базисі кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ, дорівнює різниці дефектів матриць $(A-\lambda E)^i$ та $(A-\lambda E)^{i-1}$ (тут $X^0 = E$ для довільної квадратної матриці X).*

Основний результат про Жорданову нормальну форму (Ж.Н.Ф.) матриці описується наступною теоремою Жордана:

Теорема 5.2. *Для довільної матриці $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ існує невироджена матриця $S \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ така, що матриця $A_J = S^{-1}AS$ є прямою сумою клітин Жордана (тобто є блочно-діагональною матрицею з клітинами Жордана по діагоналі), причому матриця B визначена однозначно, з точністю до перестановки клітин Жордана, з яких вона складаєтьcя.*

5.2 Основні типи задач

У цій темі природно виділити три основні типи задач:

1. Знайти Ж.Н.Ф. матриці A.
2. Знайти ланцюжковий базис кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ.
3. Звести матрицю A до Ж.Н.Ф., тобто знайти її Ж.Н.Ф. та відповідну матрицю переходу.

5.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 5.1. *Знаходження Ж.Н.Ф. матриці A.*

Для знаходження Ж.Н.Ф. матриці A необхідно:

- Обчислити характеристичний многочлен матриці A, знайти всі її власні числа та їх кратності (алгоритм 3.1).
- Для кожного власного числа λ матриці A та для кожного $i \in \mathbb{N}$ знайти кількість $s_i(\lambda)$ клітин Жордана $\mathbb{J}_i(\lambda)$, що входять до Ж.Н.Ф. матриці A. Для цього обчислити числа $r_0(\lambda) = n$, $r_1(\lambda) = \mathrm{rank}(A-\lambda E)$, $r_2(\lambda) = (A-\lambda E)^2$ і так далі до тих пір, поки для деякого i не буде виконано рівності $r_i(\lambda) = r_{i+1}(\lambda)$. Після цього скористатись формулою $s_i(\lambda) = r_{i-1}(\lambda) - 2r_i(\lambda) + r_{i+1}(\lambda)$.
- Побудувати Ж.Н.Ф. матриці A як блочно-діагональну матрицю, діагональ якої складають клітини Жордана $\mathbb{J}_k(\lambda)$, де λ пробігає всі власні числа матриці A, і кожна з клітин $\mathbb{J}_k(\lambda)$ зустрічається рівно $s_k(\lambda)$ разів.

Зауваження. *Варто зауважити, що в результуючій матриці, що є Ж.Н.Ф. матриці A, власне число λ матриці A мусить зустрічатися на діагоналі рівно стільки разів, яка його кратність.*

Алгоритм 5.2. *Знаходження ланцюжкового базису кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ.*

Для знаходження ланцюжкового базису кореневого підпростору матриці A, що відповідає власному числу λ, необхідно:

1. Знайти кількість $s_i(\lambda)$ ланцюжків довжини i, що входять до шуканого базису. Для цього обчислити числа $r_0(\lambda) = n$, $r_1(\lambda) = \operatorname{rank}(A - \lambda E)$, $r_2(\lambda) = (A - \lambda E)^2$ і так далі до тих пір, поки для деякого i не буде виконано рівності $r_i(\lambda) = r_{i+1}(\lambda)$. Після цього скористатись формулою $s_i(\lambda) = r_{i-1}(\lambda) - 2r_i(\lambda) + r_{i+1}(\lambda)$.
2. Зафіксувати те найменше i^*, для якого $r_{i^*}(\lambda) = r_{i^*+1}(\lambda)$.
3. Знайти базис ядра матриці $(A - \lambda E)^{i^*}$, розв'язавши однорідну С.Л.Р., матрицею якої є матриця $(A - \lambda E)^{i^*}$.
4. Для кожного отриманого базисного вектора v побудувати ланцюжок $v_i = (A - \lambda E)^i v$.
5. Вибрати $s_{i^*}(\lambda)$ ланцюжків найбільшої довжини, які складаються з лінійно незалежних елементів. Це буде частина шуканої бази.
6. Проробити аналогічні дії для наступного (за спаданням) i, для якого $s_i(\lambda) \neq 0$, слідкуючи за лінійною незалежністю векторів, що вибираються, з вибраними раніше.
7. Продовжувати таким чином, поки не будуть вибрані всі ланцюжки.

Наступний алгоритм є загальним алгоритмом розв'язання основної задачі, яка пов'язана з теорією Ж.Н.Ф. Ми наводимо його в самому загальному випадку. Проте технічне втіленя цього алгоритму для матриць великого розміру надто складне, і реальні приклади, що їх доведеться розв'язувати на практичних заняттях, не перевищують матриць розміру 4×4. Ми не будемо розбирати прикладів загального застосування цього алгоритму. Усі можливі випадки знаходження Ж.Н.Ф. матриць розмірів 2×2, 3×3 та 4×4 будуть детально розібрані з прикладами в наступних розділах.

Алгоритм 5.3. *Зведення матриці A до Ж.Н.Ф.*

Для зведення матриці A до Ж.Н.Ф. необхідно:

- Обчислити характеристичний многочлен матриці A, знайти всі її власні числа та їх кратності (алгоритм 3.1).

- Для кожного власного числа λ матриці A та для кожного $i \in \mathbb{N}$ знайти кількість $s_i(\lambda)$ клітин Жордана $\mathbb{J}_i(\lambda)$, що входять до Ж.Н.Ф. матриці A так само, як це зроблено в алгоритмі 5.1.
- Для кожного власного числа λ знайти базу відповідного кореневого підпростору, як це описано в алгоритмі 5.2.
- Узгоджено побудувати результуючу Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S. Для цього спочатку зіставити кожній клітині Жордана, що має входити до матриці B (з урахуванням кратності), ланцюжок відповідної довжини з відповідного кореневого підпростору, після чого виписати першу клітину Жордана на діагональ матриці B. Потім, зліва направо в матриці S по стовпчиках виписати координати відповідних базисних векторів у такій послідовності: спочатку — власний вектор, потім — наступний за ним вектор ланцюжка і так далі. Те саме проробити для другої клітини Жордана, третьої і так далі.

Зауваження. *Зауважимо, що при практичних підрахунках для матриць невеликого розміру числа $s_i(\lambda)$ можна знаходити безпосередньо за допомогою останнього пункту теореми 5.1.*

5.4 Приклади

Приклад 5.1. *Знайдіть Ж.Н.Ф. матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку ми знаходимо характеристичний многочлен. У нас матриця діагональна, а тому $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3(2-\lambda)^3$, отже, ми маємо два власні числа: $\lambda_1 = 1$ кратності 3 та $\lambda_2 = 2$ кратності 3. Для кожного з них треба знайти роміри та кількість відповідних клітин Жордана.

Починаємо з $\lambda_1 = 1$. Маємо:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Віднявши від першого рядка другий, ми отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг якої очевидно дорівнює 4. Отже, дефект матриці $A-E$ дорівнює 2. Тут нам більше не треба нічого рахувати. Згідно з теоремою 5.1 кількість клітин Жордана з власним числом 1 дорівнює 2. Крім того, їх сумарна розмірність дорівнює кратності λ_1, тобто 3. Єдиний спосіб розкласти 3 у суму двох натуральних чисел, це $1+2$. Отже, ми маємо одну клітину $\mathbb{J}_1(1)$ та одну клітину $\mathbb{J}_2(1)$.

Переходимо до $\lambda_2 = 2$. Маємо:

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Додавши до третього рядка другий, ми отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ранг якої очевидно дорівнює 5. Отже, дефект матриці $A-E$ дорівнює 1, тобто існує єдина клітина Жордана з власним числом 2. Зрозуміло, що це $\mathbb{J}_3(2)$, оскільки її розмірність має збігатися з кратністю λ_2 в $\chi_A(\lambda)$.

Отже, Ж.Н.Ф. матрйці A дорівнює $B = \mathbb{J}_1(1) \oplus \mathbb{J}_2(1) \oplus \mathbb{J}_3(2)$, або у вигляді матриці:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 5.2. *Обчисліть ланцюжковий базис кореневого підпростору матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

що відповідає власному числу 1.

Доведення. Спочатку зауважимо, що кратність власного числа 1 дорівнює 5, оскільки матриця A є трикутною, а число 1 зустрічається на її діагоналі 5 разів. Отже, наша база мусить складатися з 5 векторів.

Виписуємо матрицю $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює трьом, отже ми матимемо три ланцюжки в нашій базі. Цього ще не вистачає для обчислення довжин усіх ланцюжків. Підносимо $A - E$ до квадрата:

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 2, тобто її дефект дорівнює 4. Отже, існує $4 - 3 = 1$ клітина Жордана $\mathbb{J}_k(1)$ з $k > 1$. Звідси ми отримуємо, що, насправді, у нас має вийти три ланцюжки: один довжини 3 та два – довжини 1. Щоб знайти їх, піднесемо $A - E$ до кубу:

$$(A - E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо відповідну однорідну С.Л.Р., вибравши, як завжди, x_4 залежною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -2x_3 - (3/2)x_6 \\ x_5 &= x_5 \\ x_6 &= x_6 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{x_6}{2}.$$

Нам потрібно побудувати ланцюжок довжини 3. Можна перебрати всі базисні вектори. Але ми спробуємо почати з

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$(A-E)v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2, \quad (A-E)v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_3 \neq 0.$$

Останній вектор не є нульовим, а отже ланцюжок довжини 3 побудовано. Залишилось добрати до нього два ланцюжки довжини 1 (власні вектори), що мають бути лінійно незалежні з v_3. Такими можна взяти, наприклад,

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукана база: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, причому $v_1 \to v_2 \to v_3 \to 0$, $v_4 \to 0$, $v_5 \to 0$. $\square$

5.5 Задачі теоретичного характеру

Приклад 5.3. *Знайдіть Ж.Н.Ф. матриці* $A = (\mathbb{J}_k(\lambda))^2$.

Доведення. Обчислимо матрицю A:

$$(\mathbb{J}_k(\lambda))^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що єдиним власним числом матриці A буде λ^2 кратності k. Обчислимо матрицю $A - \lambda^2 E$:

$$A - \lambda^2 E = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер вже абсолютно очевидно, що при $\lambda \neq 0$ ранг отриманої матриці $A - \lambda^2 E$ дорівнює $k - 1$. Це означає, що її дефект дорівнює 1, і ми маємо одну клітину Жордана. Тобто Ж.Н.Ф. матриці A є $\mathbb{J}_k(\lambda^2)$.

Розглянемо випадок $\lambda = 0$. Тоді

$$A - 0E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

але ранг цієї матриці дорівнює $k-2$. Це означає, що Ж.Н.Ф. матриці A містить дві клітини Жордана, оскільки $k - (k-2) = 2$. Отже, нам треба знайти розміри цих клітин. Легко бачити, що $Ae_i = e_{i-2}$ для всіх $2 \leq i \leq k$ та $Ae_2 = 0$. Тобто, вектори e_i для $2 \leq i \leq k$ утворюють ланцюжок довжини $n-1$. Це означає, що принаймні одна з клітин Жордана в Ж.Н.Ф. матриці A мусить мати розмір не менше за $k-1$. Число k можна розкласти в суму двох натуральних чисел, одне з яких не менше $k-1$ єдиним чином: $k = 1 + (k-1)$. Отже, Ж.Н.Ф. матриці A є $\mathbb{J}_1(0) \oplus \mathbb{J}_{k-1}(0)$. □

Приклад 5.4. *Доведіть, що для довільної невиродженої матриці A існує така матриця X, що $X^2 = A$.*

Доведення. Нехай Ж.Н.Ф. матриці A дорівнює B, та S — така невироджена матриця, що $B = S^{-1}AS$. Покладемо $Y = S^{-1}XS$. Помноживши рівняння $X^2 = A$ зліва на S^{-1} та справа на S, ми отримаємо $Y^2 = B$. Оскільки S — обертовна, то рівняння $X^2 = A$ та $Y^2 = B$ мають розв'язки одночасно. Тому досить довести, що має розв'язок рівняння $Y^2 = B$.

З іншого боку, ми знаємо, що у випадку, коли матриця T є прямою сумою матриць T_1 та T_2, довільний многочлен від T є прямою сумою таких само многочленів від T_1 та T_2. Згідно з теоремою 5.2 матриця B є прямою сумою клітин Жордана $\mathbb{J}_k(\lambda)$ для деяких k та $\lambda \neq 0$ (бо матриця B є невиродженою за умовою). Отже, нам досить довести, що рівняння $Y^2 = B$ має розв'язок у припущенні, що $B = \mathbb{J}_k(\lambda)$, $\lambda \neq 0$.

Нехай $\mu \in \mathbb{C}$ вибрано таким чином, що $\mu^2 = \lambda$. Таке μ, очевидно, існує. Згідно з прикладом 5.3 Ж.Н.Ф. матриці $P = (\mathbb{J}_k(\mu))^2$ дорівнює $\mathbb{J}_k(\lambda) = B$. Це означає, що існує невироджена матриця T, така, що $T^{-1}PT = B$, а отже,

$$T^{-1}(\mathbb{J}_k(\mu))^2 T = (T^{-1}\mathbb{J}_k(\mu)T)^2 = B.$$

Звідси випливає, що рівняння $Y^2 = B$, а з ним і рівняння $X^2 = A$ мають розв'язки. □

5.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 5.1. *Знайдіть Ж.Н.Ф. матриць*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.2. *Обчисліть ланцюжковий базис кореневого підпростору матриць*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

що відповідає власному числу 1.

Задача 5.3. *Знайдіть Ж.Н.Ф. матриці* $(\mathbb{J}_k(\lambda))^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 5.4. *Доведіть, що для довільної невиродженої матриці* A *та для довільного* $k \in \mathbb{N}$ *існує така матриця* X, *що* $X^k = A$.

Задача 5.5. *Доведіть, що для довільної матриці* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *рангу* 1 *існує* $t \in \mathbb{C}$ *таке, що* $A^2 = tA$.

6 Жорданова форма матриць 2×2

6.1 Класифікація жорданових матриць розміру 2×2

Для комплексних матриць розміру 2×2 легко перелічити усі можливі варіанти жорданових нормальних форм. Справді, кількість клітин Жордана, з яких має складатись подібна матриця, не може бути більша за 2. Якщо клітин Жордана 2, тоді обидві клітини мають розмір 1×1 і жорданова форма є діагональною. Крім того, в наших клітинах Жордана власні числа можуть збігатись, а можуть і не збігатись. Якщо ж клітина Жордана єдина, то жорданова форма має вигляд $\mathbb{J}_2(\lambda)$. Це можна перетворити в наступну теорему:

Теорема 6.1. *Нехай $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Тоді Ж.Н.Ф. матриці A має один із наступних виглядів:*

1. *$\mathbb{J}_2(\lambda)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$;*
2. *$\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ для деяких $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;*
3. *$\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Ми називатимемо відповідні Ж.Н.Ф. формами першого, другого та третього типів. Найпростішим є дослідження Ж.Н.Ф. останнього, третього типу. А саме, справедлива така теорема:

Теорема 6.2. *Нехай Ж.Н.Ф. матриці A є $B = \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \cdots \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$. Тоді $A = B$.*

Теорема 6.2 показує, що Ж.Н.Ф. матриці є скалярною матрицею (тобто матрицею вигляду λE) тоді й лише тоді, кола сама матриця є скалярною. Цей випадок тривіальний. Отже, надалі ми розглянемо алгоритми знаходження Ж.Н.Ф. інших матриць. Для початку ми наведемо теорему, що дає класифікаційні ознаки типу Ж.Н.Ф. фіксованої матриці.

Теорема 6.3. 1. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. першого типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ і матриця A не є скалярною.*

2. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. другого типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені.*

3. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. третього типу тоді й тільки тоді, коли вона скалярна.*

6.2 Алгоритми зведення до Ж.Н.Ф. матриці 2×2

Теорема 6.3 дає ефективний алгоритм для ідентифікації типу жорданової форми матриці A. Далі ми пропонуємо Вашій увазі алгоритми знаходження відповідних матриць переходу.

Алгоритм 6.1. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A першого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A першого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1, як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Обчислити другий базисний вектор v_2, як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_1.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_2(\lambda)$. Для запису матриці S, випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, а потім — координати вектора v_2.

Алгоритм 6.2. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A другого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A другого типу, власними числами якої є λ та μ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 з власним числом λ, як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Обчислити власний вектор v_2 з власним числом μ, як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$. Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, а потім — координати вектора v_2.

6.3 Приклади

Приклад 6.1. *Звести до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Оскільки матриця A не є скалярною, це не буде третій тип. Знайдемо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(4-\lambda) \cdot \lambda + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Маємо одне власне число 2 кратності 2. Оскільки A не скалярна, вона має Ж.Н.Ф. першого типу. Спочатку знайдемо власний вектор:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= -2x_2 \\ x_2 &= x_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_2 потрібно розв'зати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= -2x_2 - 1 \\ x_2 &= x_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, вектор v_2 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 6.2. *Звести до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Оскільки матриця A не є скалярною, це не буде третій тип. Знайдемо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4).$$

Маємо два власні числа: -1 та 4. Отже, A має Ж.Н.Ф. другого типу. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом -1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & (-3/2)x_2 \\ x_2 & = & x_2 \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} x_2/2.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом 4:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_2 \\ x_2 & = & x_2 \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

6.4 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матриці*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

7 Жорданова форма матриць 3×3

7.1 Класифікація жорданових матриць розміру 3×3

Класифікація жорданових форм для комплексних матриць розміру 3×3 суттєво складніша за попередній випадок матриць розміру 2×2. Проте її цілком можна осягнути. Справді, кількість клітин Жордана, з яких має складатись подібна матриця, не може перевищувати 3. Якщо клітин Жордана 3, тоді всі вони мають розмір 1×1 і жорданова форма є діагональною. Власні числа в наших клітинах можуть бути якими завгодно, що дає рівно три різні випадки. Якщо клітин Жордана 2, тоді одна з них має розмір 1×1, а інша — 2×2. Зауваживши, що власні числа можуть бути однаковими і різними, матимемо ще два випадки. Якщо ж клітина Жордана єдина, то жорданова форма має вигляд $\mathbb{J}_3(\lambda)$. Попередні міркування можна зібрати в наступну теорему:

Теорема 7.1. *Нехай $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Тоді Ж.Н.Ф. матриці A має один з наступних виглядів:*

1. $\mathbb{J}_3(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*
2. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*
3. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$*;*
4. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\nu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \neq \nu \in \mathbb{C}$*;*
5. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$*;*
6. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ми називатимемо відповідні форми Ж.Н.Ф. формами першого, другого. . . шостого типів. Найпростішим є дослідження Ж.Н.Ф. останнього, шостого типу. З теореми 6.2 випливає, що Ж.Н.Ф. шостого типу мають скалярні матриці й лише вони. Надалі ми зосередимо свою увагу на знаходженні Ж.Н.Ф. інших матриць. Для початку наведемо теорему, що дає класифікаційні ознаки типу Ж.Н.Ф. фіксованої матриці.

Теорема 7.2.
1. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. першого типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ і матриця $A - \mu E$ має дефект* 1.

2. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. другого типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ і матриця $A-\mu E$ має дефект* 2.

3. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. третього типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені $\nu \neq \mu$, з яких μ має кратність* 2*, причому матриця $A - \mu E$ має дефект* 1.

4. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. четвертого типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має три різні корені.*

5. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. п'ятого типу тоді й тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені $\nu \neq \mu$, з яких μ має кратність 2, причому матриця $A - \mu E$ має дефект 2.*

6. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. шостого типу тоді й тільки тоді, коли вона скалярна.*

7.2 Алгоритми зведення до Ж.Н.Ф. матриці 3×3

Теорема 6.3 дає ефективний алгоритм для ідентифікації типу Жорданової форми матриці A. Далі ми пропонуємо Вашій увазі алгоритми знаходження відповідних матриць переходу.

Алгоритм 7.1. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A першого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A першого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Обчислити другий базисний вектор v_2 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_1.
- Обчислити третій базисний вектор v_3 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_2.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_3(\lambda)$. Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, і нарешті, координати вектора v_3.

Алгоритм 7.2. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A другого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A другого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Обчислити власні вектори $\hat{v}_1$ та $\hat{v}_2$ як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- За вектор v_3 вибрати довільний ненульовий вектор з $\mathbb{C}^3$, який не є власним вектором матриці A, тобто не є лінійною комбінацією векторів $\hat{v}_1$ та $\hat{v}_2$. Наприклад, матриця $A - \lambda E$ обов'язково ненульова. Нехай її i-й стовпчик не дорівнює нулю. Тоді за v_3 можна взяти вектор, i-та координата якого дорівнює 1, а інші координати нульові.

- Покласти $v_2 = (A - \lambda E)v_3$.

- Вибрати v_1 з векторів $\hat{v}_1$ та $\hat{v}_2$ так, щоб він був лінійно незалежним з v_2.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, і нарешті, координати вектора v_3.

Алгоритм 7.3. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A третього типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A третього типу, власними числами якої є λ кратності 2 та μ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.

- Обчислити власний вектор v_2 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.

- Обчислити третій базисний вектор v_3 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_2.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, і нарешті, координати вектора v_3.

Алгоритм 7.4. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A четвертого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A четвертого типу, власними числами якої є λ, μ та ν, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.

- Обчислити власний вектор v_2 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.

- Обчислити власний вектор v_3 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \nu E$.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\nu)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, і нарешті, координати вектора v_3.

Алгоритм 7.5. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A п'ятого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A п'ятого типу, власними числами якої є λ кратності 2 та μ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.
- Обчислити власні вектори v_2 та v_3 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, і нарешті, координати вектора v_3.

7.3 Приклади

Приклад 7.1. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Це вже не так просто, як у випадку матриць 2×2. Отже, спершу обчислюємо характеристичний многочлен (зауваживши, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((3-\lambda)(-1-\lambda)+4)(1-\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(1-\lambda) = -(\lambda-1)^3.$$

Маємо одне власне число 1 кратності 3. Цього ще недостатньо для визначення типу. Отже, обчислимо дефект матриці $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цілком очевидно, що ця матриця має ранг 2, тобто її дефект дорівнює 1. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. першого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи наведений вище алгоритм 7.1. Спочатку знайдемо власний вектор:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\{[2]+2*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \{(1/4)*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{[1]+(-1)*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & -2x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_2 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\{[2]+2*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \{(1/4)*[2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \{[1]+(-1)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & 1 - 2x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_2 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, для знаходження вектора v_3 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+2*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \{(1/4)*[2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right) \{[1]+(-1)*[2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -1/4 - 2x_1 \\ x_3 = 1/4 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_3 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 7.2. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зауваживши, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= ((4-\lambda)(2-\lambda)+1)(3-\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 9)(3-\lambda) = -(\lambda-3)^3.$$

Маємо власне число 3 кратності 3. Для визначення типу треба обчислити дефект матриці $A - 3E$:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цілком очевидно, що ця матриця має ранг 1, тобто її дефект дорівнює 2. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. другого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи описаний вище алгоритм 7.2. Спочатку знайдемо власні вектори:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 та x_3 вільними змінними:

$$\begin{cases} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже,

$$\hat{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що перший рядок матриці $A - 3E$ ненульовий, отже, можна вибрати

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер подіємо на v_3 матрицею $A - 3E$, обчислюючи v_2:

$$v_2 = (A - 3E)v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що обидва знайдені нами вектори $\hat{v_1}$ та $\hat{v_2}$ лінійно незалежні з v_2. Отже, як v_1 можна вибрати будь-який з них, наприклад

$$v_1 = \hat{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Приклад 7.3. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зауваживши, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 3 \\ -4 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((-2-\lambda)(3-\lambda)+4)(-1-\lambda) = (\lambda^2-\lambda-2)(-1-\lambda) =$$
$$= (2-\lambda)(-1-\lambda)^2 = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

Маємо власне число -1 кратності 2 та власне число 2 кратності 1. Для визначення типу обчислимо дефект матриці $A+E$:

$$A+E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цілком очевидно, що ця матриця має ранг 2, тобто її дефект дорівнює 1. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. третього типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи описаний вище алгоритм 7.3. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом 2:

$$A-2E = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \{[2]+(-1)*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\{(-1/3)*[3]\} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{[1]+(-3)*[3]\}\{[2]+5*[3]\} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & 4x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right., \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом -1:

$$A + E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\{[2] + (-4) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \{(-1/14) * [2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{[1] + (-3) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right., \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_3 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\{[2] + (-4) * [1]\} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \end{array} \right) \{(-1/14) * [2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/14 \end{array} \right) \{[1] + (-3) * [2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 5/14 \\ 0 & 0 & 1 & 3/14 \end{array} \right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_1 + 5/14 \\ x_3 & = & 3/14 \end{array} \right., \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/14 \\ 3/14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_2 можна вибрати, наприклад таким чином:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/14 \\ 3/14 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5/14 \\ 0 & 0 & 3/14 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 7.4. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зауваживши, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 5 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((1-\lambda)(-3-\lambda)-5)(3-\lambda) = (\lambda^2+2\lambda-8)(3-\lambda) =$$
$$= (2-\lambda)(-4-\lambda)(3-\lambda) =$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-3).$$

Маємо власні числа 2, -4 та 3. Отже, матриця A є матрицею четвертого типу.

Знайдемо матрицю переходу, використовуючи алгоритм 7.4. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом 2:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \{[2] + 2 * [1]\} \mapsto$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \{-1 * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом -4:

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \{[2] + 1 * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \{(1/7) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -5x_1 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, знаходимо власний вектор з власним числом 3:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \{[2] + 6 * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{(-1/7) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{[1] + 2 * [2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_3 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 7.5. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зауваживши, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((6-\lambda)(6-\lambda)-1)(5-\lambda) = (\lambda^2 - 12\lambda + 35)(5-\lambda) =$$
$$= (7-\lambda)(5-\lambda)(5-\lambda) = -(\lambda-7)(\lambda-5)^2.$$

Маємо власне числа 5 кратності 2 та власне число 7 кратності 1. Для визначення типу знайдемо дефект матриці $A - 5E$:

$$A - 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 1, отже, її дефект дорівнює 2. Це означає, що матриця A є матрицею п'ятого типу.

Знайдемо матрицю переходу, використовуючи алгоритм 7.5. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом 7:

$$A - 7E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \{[2] + 1 * [1]\} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\{(1/2) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власні вектори з власним числом 5:

$$A - 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 та x_3 вільними змінними:

$$\begin{cases} x_1 &= -x_2 - x_3 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже,

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

7.4 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матриці*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -8 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

8 Жорданова форма матриць 4×4

8.1 Класифікація жорданових матриць розміру 4×4

Класифікація жорданових форм для комплексних матриць розміру 4×4 значно більша навіть за випадок 3×3 матриць. Проте спробуємо осягнути і її. Справді, кількість клітин Жордана, з яких має складатись подібна матриця, не може перевищувати 4. Якщо клітин Жордана 4, тоді усі вони мають розмір 1×1 і жорданова форма є діагональною. Власні числа в наших клітинах можуть бути якими завгодно, що дає п'ять різних випадків. Якщо клітин Жордана 3, то одна з них має розмір 2×2, а інші — 1×1. Зауваживши, що власні числа можуть бути якими завгодно, матимемо ще чотири випадки. Якщо клітин Жордана 2, тоді вони обидві мають розмір 2×2, або одна з них має розмір 3×3, а інші — 1×1. Це дає ще чотири випадки. Нарешті, якщо клітина Жордана єдина, то жорданова форма має вигляд $\mathbb{J}_4(\lambda)$. Попередні міркування можна зібрати в наступну теорему:

Теорема 8.1. *Нехай $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$. Тоді Ж.Н.Ф. матриці A має один з наступних виглядів:*

1. $\mathbb{J}_4(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$;
2. $\mathbb{J}_3(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$;
3. $\mathbb{J}_3(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;
4. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$;
5. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_2(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;
6. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$;
7. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;
8. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;
9. $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\nu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \neq \nu \in \mathbb{C}$;
10. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda)$ *для деякого* $\lambda \in \mathbb{C}$.
11. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;
12. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\mu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$;
13. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\nu)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \neq \nu \in \mathbb{C}$;
14. $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\nu) \oplus \mathbb{J}_1(\kappa)$ *для деяких* $\lambda \neq \mu \neq \nu \neq \kappa \in \mathbb{C}$.

Ми називатимемо відповідні форми Ж.Н.Ф. формами першого, другого. . . , чотирнадцятого типів. Найпростішим є дослідження Ж.Н.Ф. десятого типу. З теореми 6.2 одразу випливає, що подібну Ж.Н.Ф. мають скалярні матриці і лише вони. Надалі ми зосередимо свою увагу на знаходження Ж.Н.Ф. інших матриць. Крім того, Ж.Н.Ф. діагоналізовних матриць можна знайти, використовуючи алгоритм 4.3. Для початку ми наведемо теорему, що дає класифікаційні ознаки типу Ж.Н.Ф. фіксованої матриці.

Теорема 8.2. *1. Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. першого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ і матриця $A - \mu E$ має дефект* 1.

2. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. другого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ, матриця $A - \mu E$ має дефект* 2 *та матриця $(A - \mu E)^2$ ненульова.*

3. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. третього типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені $\nu \neq \mu$, з яких μ має кратність* 3, *причому матриця $A - \mu E$ має дефект* 1.

4. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. четвертого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ, матриця $A - \mu E$ має дефект* 2 *та матриця $(A - \mu E)^2$ нульова.*

5. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. п'ятого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені $\nu \neq \mu$, обидва кратності* 2, *причому матриці $A - \mu E$ та $A - \nu E$ мають дефект* 1.

6. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. шостого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має єдиний корінь μ і матриця $A - \mu E$ має дефект* 3.

7. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. сьомого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені $\nu \neq \mu$, з яких μ має кратність* 3, *причому матриця $A - \mu E$ має дефект* 2.

8. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. восьмого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має два різні корені $\nu \neq \mu$, обидва кратності* 2, *причому матриця $A - \mu E$ має дефект* 1, *а матриця $A - \nu E$ має дефект* 2.

9. *Матриця $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ має Ж.Н.Ф. дев'ятого типу тоді і тільки тоді, коли $\chi_A(\lambda)$ має три різні корені $\mu \neq \nu \neq \kappa$, з яких μ має кратність* 2, *причому матриця $A - \mu E$ має дефект* 1.

10. *Матриця* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ *має Ж.Н.Ф. десятого типу тоді і тільки тоді, коли вона скалярна.*

11. *Матриця* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ *має Ж.Н.Ф. одинадцятого типу тоді і тільки тоді, коли* $\chi_A(\lambda)$ *має два різні корені* $\nu \neq \mu$, *з яких* μ *має кратність* 3, *причому матриця* $A - \mu E$ *має дефект* 3.

12. *Матриця* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ *має Ж.Н.Ф. дванадцятого типу тоді і тільки тоді, коли* $\chi_A(\lambda)$ *має два різні корені* $\nu \neq \mu$, *обидва кратності* 2, *причому матриці* $A - \mu E$ *та* $A - \nu E$ *мають дефект* 2.

13. *Матриця* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ *має Ж.Н.Ф. тринадцятого типу тоді і тільки тоді, коли* $\chi_A(\lambda)$ *має три різні корені* $\mu \neq \nu \neq \kappa$, *з яких* μ *має кратність* 2, *причому матриця* $A-\mu E$ *має дефект* 2.

14. *Матриця* $A \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{C})$ *має Ж.Н.Ф. чотирнадцятого типу тоді і тільки тоді, коли* $\chi_A(\lambda)$ *має чотири різні корені.*

8.2 Алгоритми зведення до Ж.Н.Ф. матриці 4×4

Теорема 6.3 дає ефективний алгоритм для ідентифікації типу жорданової форми матриці A. Далі ми пропонуємо Вашій увазі алгоритми знаходження матриць переходу для недіагоналізовних жорданових форм. У випадку діагоналізовних матриць (типи з десятого по чотирнидцятий) можна звертатись до алгоритму 4.3.

Алгоритм 8.1. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці* A *першого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A першого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Обчислити другий базисний вектор v_2 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_1.
- Обчислити третій базисний вектор v_3 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_2.
- Обчислити третій базисний вектор v_4 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_3.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_4(\lambda)$. Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і нарешті — координати вектора v_4.

Алгоритм 8.2. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A другого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A другого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Обчислити власні вектори $\hat{v_1}$ та $\hat{v_2}$ як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.

- Для кожного базисного вектора e_i (одиничка на i-му місці) побудувати ланцюжок $(A-\lambda E)^j e_i$. Вибрати таке i, для якого $(A-\lambda E)e_i$ та $(A-\lambda E)^2 e_i$ ненульові. Покласти $v_4 = e_i$, $v_3 = (A-\lambda E)e_i$ та $v_2 = (A - \lambda E)^2 e_i$.

- Вибрати v_1 з векторів $\hat{v_1}$ та $\hat{v_2}$ так, щоб він був лінійно незалежним з v_2.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_3(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.3. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A третього типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A третього типу, власними числами якої є λ кратності 3 та μ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.

- Обчислити власний вектор v_2 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.

- Обчислити третій базисний вектор v_3 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_2.

- Обчислити останній базисний вектор v_4 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_3.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_3(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.4. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A четвертого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A четвертого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Для кожного базисного вектора e_i (одиничка на i-му місці) побудувати ланцюжок $(A-\lambda E)^j e_i$. Вибрати такі два різні i_1 та i_2 для яких $(A-\lambda E)e_{i_1}$ та $(A-\lambda E)e_{i_2}$ ненульові та лінійно незалежні.
- Покласти $v_4 = e_{i_1}$, $v_3 = (A-\lambda E)v_4$, $v_2 = e_{i_2}$ та $v_1 = (A-\lambda E)v_2$.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_2(\lambda) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$. Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.5. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A п'ятого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A п'ятого типу, власними числами якої є λ та μ кратності 2, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A-\mu E$.
- Обчислити другий базисний вектор v_2 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A-\mu E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_1.
- Обчислити власний вектор v_3 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A-\lambda E$.
- Обчислити останній базисний вектор v_4 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A-\lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_3.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_2(\mu) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.6. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A шостого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A шостого типу, власним числом якої є λ, необхідно:

- Обчислити власні вектори $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ та $\hat{v}_3$ як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A-\lambda E$.

- Покласти $v_4 = e_i$, де i вибрано так, що i-й стовпчик матриці $A - \lambda E$ ненульовий.

- Покласти $v_3 = (A - \lambda E)v_4$.

- Вибрати v_1 та v_2 з векторів $\hat{v_1}$, $\hat{v_2}$ та $\hat{v_3}$ так, щоб вони були лінійно незалежними з v_3.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.7. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A сьомого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A сьомого типу, власними числами якої є λ кратності 3 та μ, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.

- Обчислити власні вектори $\hat{v_2}$ та $\hat{v_3}$ як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.

- Піднести матрицю $A - \lambda E$ до квадрату $B = (A - \lambda E)^2$.

- Обчислити Ф.С.Р. w_1, w_2, w_3 однорідною С.Л.Р. з матрицею B.

- Знайти w_i, для якого $(A - \lambda E)w_i \neq 0$.

- Покласти $v_4 = w_i$, де w_i знайдено вище.

- Покласти $v_3 = (A - \lambda E)v_4$.

- Вибрати v_2 з векторів $\hat{v_2}$ та $\hat{v_3}$ так, щоб він був лінійно незалежними з v_3.

- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\lambda) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.8. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A восьмого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A восьмого типу, власними числами якої є λ та μ кратності 2, необхідно:

- Обчислити власні вектори v_1 та v_2 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.

- Обчислити власний вектор v_3 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Обчислити останній базисний вектор v_4 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_3.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

Алгоритм 8.9. *Знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A дев'ятого типу.*

Для знаходження матриці переходу для Ж.Н.Ф. матриці A дев'ятого типу, власними числами якої є λ, μ та ν, серед яких λ кратності 2, необхідно:

- Обчислити власний вектор v_1 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \mu E$.
- Обчислити власний вектор v_2 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \nu E$.
- Обчислити власний вектор v_3 як Ф.С.Р. однорідної С.Л.Р. з матрицею $A - \lambda E$.
- Обчислити останній базисний вектор v_4 як деякий розв'язок неоднорідної С.Л.Р., матрицею якої є $A - \lambda E$, а стовпчик вільних членів збігається з v_3.
- Жордановою формою A буде $\mathbb{J}_1(\mu) \oplus \mathbb{J}_1(\nu) \oplus \mathbb{J}_2(\lambda)$ (порядок клітин важливий, саме з ним буде узгоджено матрицю переходу). Для запису матриці S випишіть у стовпчик спочатку координати вектора v_1, потім — координати вектора v_2, далі — координати вектора v_3 і, нарешті, координати вектора v_4.

8.3 Приклади

Приклад 8.1. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

Маємо одне власне число 1 кратності 4. Цього ще недостатньо для визначення типу. Отже, обчислимо дефект матриці $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що ця матриця має ранг 3, тобто її дефект дорівнює 1. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. першого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи описаний вище алгоритм 8.1. Спочатку знайдемо власний вектор:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{[2] + (-1) * [3]\}\{[1] + (-1) * [3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{[1] + (-1) * [2]\} \mapsto\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_2 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-1)*[3]\}\{[1]+(-1)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-1)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_2 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_3 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-1)*[3]\}\{[1]+(-1)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-1)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 1 \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_3 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, для знаходження вектора v_4 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-1)*[3]\}\{[1]+(-1)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-1)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & -2 \\ x_4 & = & 1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_4 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.2. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (-\lambda(4-\lambda)+4)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) = (\lambda^2-4\lambda+4)^2 = (\lambda-2)^4.$$

Маємо власне число 2 кратності 4. Для визначення типу треба обчислити дефект матриці $A-2E$:

$$A-2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\{[1]+(-1)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця має ранг 2, тобто її дефект дорівнює $4-2=2$. Піднесемо матрицю $A-2E$ до квадрату:

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. другого типу.

Знайдемо матрицю переходу, використовуючи алгоритм 8.2. Спочатку знайдемо власні вектори:

$$A-2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 та x_4 вільними змінними:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -2x_1 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Отже,

$$\hat{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер нам треба діяти матрицею $A - 2E$ на базисні вектори e_i, причому треба шукати таке i, щоб якомога довше ми не отримали нуль. Давайте почнемо з останнього e_4, оскільки четвертий рядок матриці $A-2E$ "найбільш відмінний від нуля". Це нічого не означає, проте можна сподіватись, що так ми швидше досягнемо успіху.

$$(A-2E)e_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = w.$$

Далі:

$$(A-2E)w = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u.$$

Ми отримали, що $u \neq 0$. Отже, ми можемо покласти

$$v_4 = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = u = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер ми бачимо, що вектор $\hat{v_2}$ лінійно незалежний з v_2. Отже, як v_1 можна вибрати $\hat{v_2}$:

$$v_1 = \hat{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно, знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.3. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((1-\lambda)(-2-\lambda)-10)(3-\lambda)^2 = (\lambda^2+\lambda-12)(3-\lambda)^2 = (\lambda+4)(\lambda-3)^3.$$

Маємо власне число 3 кратності 3 та власне число -4 кратності 1. Цього ще не достатньо для того, щоб визначити тип. Отже, обчислимо дефект матриці $A - 3E$:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Цілком очевидно, що ця матриця має ранг 3, тобто, її дефект дорівнює 1. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. третього типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи наведений вище алгоритм 8.3. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом -4:

$$A + 4E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \{(1/7) * [4]\} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\{[1] + (-1) * [4]\}\{[2] + (-1) * [4]\}\{[3] + 1 * [4]\} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\{(1/7) * [3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{[1] + (-2) * [3]\}$$
$$\{[2] + 1 * [3]\} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -5x_1/2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1/2.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом 3:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{(-1) * [3]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{[1] + (-1) * [3]\}$$

$$\{[2] + (-1) * [3]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{(-1) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{[1] + (-2) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{(-1/8) * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{[2] + (-5) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_3 потрібно розв'язати таку неоднорідну

С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{(-1)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-1)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{(-1)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \{[1]+(-2)*[2]\} \mapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -8 & 0 & 0 & 3 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \{(-1/8)*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -3/8 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-5)*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_1 - 3/8 \\ x_3 & = & 7/8 \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/8 \\ 7/8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_3 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/8 \\ 7/8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_4 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7/8 \end{array}\right) \{(-1)*[3]\} \mapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \end{array}\right) \{[1]+(-1)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\} \mapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 7/8 \\ 5 & -5 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \end{array}\right) \{(-1)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 & 7/8 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-2)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -8 & 0 & 0 & 15/8 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \end{array}\right)$$

$$\{(-1/8)*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -15/64 \\ -5 & 5 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-5)*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -15/64 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 43/64 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/8 \end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 - 15/64 \\ x_3 = 43/64 \\ x_4 = -7/8 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15/64 \\ 43/64 \\ -7/8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_4 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -15/64 \\ 43/64 \\ -7/8 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -3/8 & -15/64 \\ 0 & 0 & 7/8 & 43/64 \\ 0 & 0 & 0 & -7/8 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.4. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((3-\lambda)(1-\lambda)+1)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) = (\lambda^2-4\lambda+4)^2 = (\lambda-2)^4.$$

Маємо власне число 2 кратності 4. Для визначення типу треба обчислити дефект матриці $A-2E$:

$$A-2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ця матриця має ранг 2, тобто її дефект дорівнює $4-2=2$. Піднесемо матрицю $A-2E$ до квадрату:

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. четвертого типу.

Згідно з алгоритмом 8.4 нам треба діяти матрицею $A-2E$ на базисні вектори e_i. Виберемо перший та третій:

$$(A-2E)e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w,$$

$$(A-2E)e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u.$$

Ми бачимо, що u та w лінійно незалежні. Отже, можна вибрати:

$$v_1 = w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.5. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((3-\lambda)(3-\lambda)-1)(4-\lambda)(2-\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 8)(4-\lambda)(2-\lambda) =$$
$$= (\lambda-4)^2(\lambda-2)^2.$$

Маємо власні числа 4 та 2, обидва кратності 2. Для визначення типу Ж.Н.Ф. треба знайти дефекти матриць $A-4E$ та $A-2E$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Дефект цієї матриці, зрозуміло, дорівнює $4-3=1$.

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

І в цієї матриці дефект також дорівнює $4-3=1$. Отже, ми маємо справу з Ж.Н.Ф. п'ятого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи наведений вище алгоритм 8.5. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом 4:

$$A-4E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\{(-1/2)*[4]\}\mapsto\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\{[1]+(-2)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\}\mapsto$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\{[1]+1*[2]\}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{(1/4)*[1]\}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\{[2]+(-3)*[1]\}\mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x_2.$$

Отже,

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_2 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)\{(-1/2)*[4]\}\mapsto$$

$$\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-2)*[3]\}\{[1]+(-1)*[3]\}\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\{[1]+1*[2]\}\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 4 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\{(1/4)*[1]\}\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2\\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-3)*[1]\}\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= -1/2+x_2\\ x_2 &= x_2\\ x_3 &= 1/2\\ x_4 &= 0\end{cases},\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_2.$$

Отже,

$$v_2=\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом 2:

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&1&3&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&1&3&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\{[2]+(-1)*[1]\}\mapsto$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&0&2&-1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\mapsto\ldots\mapsto\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= -x_2\\ x_2 &= x_2\\ x_3 &= 0\\ x_4 &= 0\end{cases},\qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}x_2.$$

Отже,

$$v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_4 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-1)*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \{[3]+1*[4]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \{(1/4)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-1)*[2]\}\{[3]+(-2)*[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-2)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 - x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1/2 \\ x_4 = -1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, вектор v_4 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.6. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)^4.$$

Маємо власне число -1 кратності 4. Для визначення типу треба обчислити дефект матриці $A+E$:

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця має ранг 1, тобто її дефект дорівнює $4-1=3$. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. шостого типу.

Згідно з алгоритмом 8.6 спочатку ми обчислюємо власні вектори:

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1, x_2 та x_3 вільними змінними:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже, можна покласти

$$\hat{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Далі ми зауважуємо, що третій рядок матриці $A+E$ ненульовий. Отже, покладемо

$$v_4 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки набір $\hat{v_1}$, $\hat{v_3}$ та v_3 є лінійно незалежним, ми можемо покласти $v_1 = \hat{v_1}$, $v_2 = \hat{v_3}$.

Остаточно, знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.7. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((2-\lambda)(2-\lambda)-1)(1-\lambda)(1-\lambda) =$$
$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 3)(1-\lambda)(1-\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-1)^3.$$

Маємо власні числа 1 та 3, перше з яких кратності 2. Для визначення типу Ж.Н.Ф. треба знайти дефект матриці $A - E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дефект цієї матриці, зрозуміло, дорівнює $4 - 2 = 2$. Отже, ми маємо справу з Ж.Н.Ф. сьомого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи наведений вище алгоритм 8.7. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом 3:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для даної системи ненульовий розв'язок дуже легко підібрати, наприклад

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власні вектори з власним числом 1:

$$A-E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\{(-1)*[2]\}\mapsto$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\{[1]+(-1)*[2]\}\mapsto\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 та x_2 вільними змінними:

$$\begin{cases}x_1&=&x_1\\x_2&=&x_2\\x_3&=&-x_1-x_2\\x_4&=&0\end{cases},\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}x_2.$$

Отже,

$$\hat{v_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\hat{v_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Тепер нам треба піднести матрицю $A-E$ до квадрата:

$$(A-E)^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&2&2&1\\2&2&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо відповідну однорідну С.Л.Р.:

$$\begin{pmatrix}2&2&2&1\\2&2&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&2&2&1\end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1, x_2 та x_3 вільними змінними:

$$\begin{cases}x_1&=&x_1\\x_2&=&x_2\\x_3&=&x_3\\x_4&=&-2x_1-2x_2-2x_3\end{cases},$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}x_3.$$

Отже,

$$\tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Зараз нам треба діяти матрицею $A - E$ на отримані вектори, поки не отримаємо ненульовий вектор:

$$(A-E)\tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тепер ми можемо покласти

$$v_4 = \tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = (A-E)v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Залишилось вибрати v_2. Ми помітимо, що обидва $\hat{v_2}$ та $\hat{v_3}$ лінійно незалежні з v_3, отже, як v_2 можна взяти будь-який з них, наприклад $v_2 = \hat{v_2}$.

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.8. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= ((3-\lambda)(3-\lambda)-4)(1-\lambda)(5-\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 5)(1-\lambda)(5-\lambda) =$$
$$= (\lambda-1)^2(\lambda-5)^2.$$

Маємо власні числа 1 та 5, обидва кратності 2. Для визначення типу Ж.Н.Ф. треба знайти дефекти матриць $A - E$ та $A - 5E$.

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Дефект цієї матриці, зрозуміло, дорівнює $4 - 2 = 2$.

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дефект цієї матриці, очевидно, дорівнює $4 - 3 = 1$. Отже, ми маємо справу з Ж.Н.Ф. восьмого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи наведений вище алгоритм 8.8. Спочатку знайдемо власні вектори з власним числом 1:

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{[1] + (-2) * [2]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{(1/2) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 та x_2 вільними змінними:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= -x_1 - x_2 \\ x_4 &= 0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом 5:

$$A-5E=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{[2]+1*[1]\} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \{(1/2)*[1]\}$$

$$\{(1/4)*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \{[1]+(-1)*[2]\}$$

$$\{[3]+(-1)*[2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \{(-1/5)*[3]\} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \{[2]+(-1)*[3]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_1 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right., \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_4 потрібно розв'язати таку неоднорідну

С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[1]+(-2)*[3]\}\{[2]+(-2)*[3]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 10 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{[2]+1*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \{(1/20)*[2]\}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \{[1]+(-10)*[2]\}\{[3]+4*[2]\}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right) \{(-1/2)*[1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_1 \\ x_3 & = & 1/10 \\ x_4 & = & 2/5 \end{array}\right., \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/10 \\ 2/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_4 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/10 \\ 2/5 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 8.9. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матрицю*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку визначимо тип Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен (зваживши на те, що наша матриця блочно-трикутна):

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= ((1-\lambda)(4-\lambda)-4)(1-\lambda)(5-\lambda) = (\lambda^2-5\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) =$$
$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-5)^2.$$

Маємо власні числа 0, 1 та 5, останнє з яких має кратніть 2. Для визначення типу Ж.Н.Ф. треба знайти дефект матриці $A-E$:

$$A-5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що дефект цієї матриці дорівнює $4-3=1$. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. дев'ятого типу.

Спробуємо знайти матрицю переходу, використовуючи наведений вище алгоритм 8.9. Спочатку знайдемо власний вектор з власним числом 0:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи легко підбирається, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом 1:

$$A-E=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\{(1/2)*[3]\}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\{[1]+(-2)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\{[2]+(-2)*[1]\}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\{[1]+2*[2]\}\mapsto$$

$$\mapsto\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\{(-1)*[2]\}\mapsto\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1\\ x_2 & = & 2x_1\\ x_3 & = & -4x_1\\ x_4 & = & 0\end{cases},\qquad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -4\\ 0\end{pmatrix}x_1.$$

Отже,

$$v_2=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -4\\ 0\end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо власний вектор з власним числом 5:

$$A-5E=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\{(1/2)*[3]\}\mapsto\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\{[1]+(-2)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\{[1]+2*[2]\}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\{(1/13)*[1]\}\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\2&-1&4&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\{[2]+(-4)*[1]\}\{[3]+2*[1]\}$$

$$\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\2&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\-2&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases}x_1&=&x_1\\x_2&=&2x_1\\x_3&=&0\\x_4&=&0\end{cases},\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}x_1.$$

Отже,

$$v_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Для знаходження вектора v_4 потрібно розв'язати таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-4&2&1&2&1\\2&-1&2&1&2\\0&0&-4&2&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c}-4&2&1&2&1\\2&-1&2&1&2\\0&0&-4&2&0\end{array}\right)\{(1/2)*[3]\}$$

$$\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c}-4&2&1&2&1\\2&-1&2&1&2\\0&0&-2&1&0\end{array}\right)\{[1]+(-2)*[3]\}\{[2]+(-1)*[3]\}$$

$$\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c}-4&2&5&0&1\\2&-1&4&0&2\\0&0&-2&1&0\end{array}\right)\{[1]+2*[2]\}\mapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&13&0&5\\2&-1&4&0&2\\0&0&-2&1&0\end{array}\right)\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&0&5/13\\2&-1&4&0&2\\0&0&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$\{[2]+(-4)*[1]\}\{[3]+2*[1]\}\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&0&5/13\\2&-1&0&0&6/13\\0&0&0&1&10/13\end{array}\right)$$

$$\{(-1)*[2]\}\mapsto\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&0&5/13\\-2&1&0&0&-6/13\\0&0&0&1&10/13\end{array}\right).$$

Записуємо відповідну систему та її векторну форму, вибираючи x_1

вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= 2x_1 - 6/13 \\ x_3 &= 5/13 \\ x_4 &= 10/13 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/13 \\ 5/13 \\ 10/13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, вектор v_4 можна вибрати, наприклад, таким чином:

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/13 \\ 5/13 \\ 10/13 \end{pmatrix}.$$

Остаточно знаходимо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -6/13 \\ 0 & -4 & 0 & 5/13 \\ 0 & 0 & 0 & 10/13 \end{pmatrix}.$$

$\square$

8.4 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. *Зведіть до Ж.Н.Ф. матриці*

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & 2 \\ -8 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9 Мінімальний многочлен матриці

9.1 Теоретичні відомості

Жорданова нормальна форма дозволяє досить легко розв'язувати значну кількість задач, пов'язаних з властивостями матриць. У цьому розділі розберемо властивості так званого мінімального многочлена матриці.

Означення 9.1. *Нехай $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Многочлен $0 \neq f(x) \in K[x]$ називається мінімальним многочленом матриці A, якщо виконуються наступні умови:*

1. $f(A) = 0$*;*
2. $f(x)$ *унітарний, тобто його старший коефіцієнт дорівнює* 1*.*
3. *Для довільного многочлена $g(x) \in K[x]$, степінь якого менша за степінь $f(x)$, виконується $g(A) \neq 0$.*

Основні властивості мінімального многочлена матриці A, який, як правило, позначається $m_A(x)$, зібрано в наступній теоремі:

Теорема 9.1. 1. *Мінімальний многочлен існує і єдиний.*

2. *Для довільної невиродженої матриці $S \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ справедливо $m_A(x) = m_{S^{-1}AS}(x)$.*
3. $m_A(x) | \chi_A(x)$*.*
4. $m_A(x)$ *є дільником довільного ненульового многочлена $g(x) \in K[x]$, для якого $g(A) = 0$.*
5. *Матриця A є діагоналізовною тоді і тільки тоді, коли $m_A(x)$ розкладається в $K(x)$ на лінійні множники і не має кратних коренів.*
6. *Для $K = \mathbb{C}$ коренями $m_A(x)$ є власні числа матриці A і лише вони.*
7. *Для $K = \mathbb{C}$ та для власного числа λ матриці A кратність λ як кореня $m_A(x)$ дорівнює найбільшому розміру клітини Жордана з власним числом λ, що зустрічається в Ж.Н.Ф. матриці A.*

Остання з властивостей, описаних в наведеній вище теоремі, дає ефективний алгоритм знаходження мінімального многочлена матриці, про який піде мова далі.

9.2 Основні типи задач

Існує один природний тип задач з цієї тематики. Проте, ми розіб'ємо його на два різні підтипи:

1. Знайдіть мінімальний многочлен матриці A, що задана в звичайному вигляді.

2. Знайти мінімальний многочлен матриці A, що задана своєю Ж.Н.Ф.

Коректність постановки останньої задачі забезпечується другим пунктом наведеної вище теореми 9.1.

9.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 9.1. *Знаходження мінімального многочлена квадратної матриці A, що задана у звичайному вигляді.*

Для знаходження мінімального многочлена матриці A, що задана у звичайному вигляді, необхідно:

- Знайти Ж.Н.Ф. матриці A, використовуючи алгоритм 5.1.
- Для кожного власного числа λ знайти максимальну розмірність k_λ клітин Жордана з цим власним числом, що входять до Ж.Н.Ф. матриці A.
- Записати мінімальний многочлен матриці, як добуток множників $(x-\lambda)^{k_\lambda}$ за всіма власними числами λ матриці A.

Алгоритм 9.2. *Знаходження мінімального многочлена квадратної матриці A, що задана своєю Ж.Н.Ф.*

Для знаходження мінімального многочлена матриці A, що задана своєю Ж.Н.Ф., необхідно:

- Для кожного власного числа λ знайти максимальну розмірність k_λ клітин Жордана з цим власним числом, що входять до Ж.Н.Ф. матриці A.
- Записати мінімальний многочлен матриці, як добуток множників $(x-\lambda)^{k_\lambda}$ за всіма власними числами λ матриці A.

9.4 Приклади

Приклад 9.1. *Знайдіть мінімальний многочлен матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку знаходимо характеристичний многочлен матриці A:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-2)^2(\lambda+2).$$

Отже, ми маємо два власні числа: $\lambda_1 = 2$ кратності 2 та $\lambda_2 = -2$ кратності 1. Для знаходження Ж.Н.Ф. матриці A потрібно визначити дефект матриці $A - 2E$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\{[2] + (-1) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці дорівнює 2, отже, її дефект дорівнює $3-2=1$. Маємо одну клітину Жордана з власним числом 2. Отже, Ж.Н.Ф. матриці A має вигляд $\mathbb{J}_1(-2) \oplus \mathbb{J}_2(2)$.

Далі для кожного власного числа треба знайти максимальний розмір клітини Жордана з цим власним числом, що входить до обчисленої Ж.Н.Ф. матриці A. Для -2 це, очевидно, 1. Для 2 це, зрозуміло, 2. Отже,

$$m_A(x) = (x+2)(x-2)^2.$$

□

Приклад 9.2. *Знайдіть мінімальний многочлен матриці*

$$A = \mathbb{J}_2(3) \oplus \mathbb{J}_3(3) \oplus \mathbb{J}_2(2) \oplus \mathbb{J}_3(-1) \oplus \mathbb{J}_3(3).$$

Доведення. Матриця задана своєю Ж.Н.Ф. Отже, для розв'язання задачі нам просто необхідно для кожного власного числа знайти максимальний розмір клітини Жордана з цим власним числом, що входить до Ж.Н.Ф. матриці A. Ми маємо три власні числа: -1, 2 та 3. Відповідні максимальні степені дорівнюють: $k_{-1} = 3$, $k_2 = 2$ та $k_3 = 3$. Отже,

$$m_A(x) = (x+1)^3(x-2)^2(x-3)^3.$$

□

Приклад 9.3. *Знайдіть мінімальний многочлен матриці*

$$A = \mathbb{J}_5(1) \oplus \mathbb{J}_5(-2) \oplus \mathbb{J}_k(1) \oplus \mathbb{J}_3(-2) \oplus \mathbb{J}_4(2).$$

Доведення. Матриця задана своєю Ж.Н.Ф. Отже, для розв'язання задачі нам просто необхідно для кожного власного числа знайти максимальний розмір клітини Жордана з цим власним числом, що входить до Ж.Н.Ф. матриці A. Ми маємо три власні числа: -2, 1 та 2. Для власних числел -2 та 2 відповідні максимальні степені дорівнюють: $k_{-2} = 5$ та $k_2 = 4$. Для власного числа 1 результат залежить від k. При $k \leq 5$ маємо $k_1 = 5$. При $k > 5$ маємо $k_1 = k$. Це можна записати в такому компактному викляді: $k_1 = \max(5, k)$. Отже,

$$m_A(x) = (x+2)^5(x-1)^{\max(5,k)}(x-2)^4.$$

□

9.5 Задачі теоретичного характеру

Приклад 9.4. *Про матрицю A відомо, що $A^2 = E$. Доведіть, що A діагоналізовна.*

Доведення. За умовою, матриця A анулюється многочленом $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, який не має кратних коренів. Оскільки $m_A(x)$ є дільником $x^2 - 1$, згідно з четвертім пунктом теореми 9.1 ми отримуємо, що $m_A(x)$ також не має кратних коренів. Згідно з п'ятім пунктом згадуваної теореми матриця A є діагоналізовною. □

Приклад 9.5. *Про матриці A та B відомо, що $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ та $m_A(x) = m_B(x)$. Чи можна стверджувати, що ці матриці мають однакову Ж.Н.Ф.?*

Доведення. Взагалі кажучи, ні. Контрприклад найменшого мажливого розміру ось такий:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ та $m_A(x) = m_B(x) = (x-1)^2$. Проте $A = \mathbb{J}_2(1) \oplus \mathbb{J}_2(1)$ а $B = \mathbb{J}_2(1) \oplus \mathbb{J}_1(1) \oplus \mathbb{J}_1(1)$, що означає, що Ж.Н.Ф. цих матриць різні. □

Зауваження. *Варто зауважити, що твердження задачі справедливе для матриць розміру* 1×1, 2×2 *та* 3×3. *Перевірка цього дуже проста і ми її опускаємо.*

Приклад 9.6. *Доведіть, що для довільної матриці $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $\chi_A(x) | (m_A(x))^k$.*

Доведення. Згідно з шостім пунктом теореми 9.1 корені $m_A(x)$ та $\chi_A(x)$ збігаються (без урахування кратності). Звідси випливає, що $\chi_A(x) | (m_A(x))^{\deg \chi_A(x)}$. □

9.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.1. *Знайдіть мінімальні многочлени матриць:*

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.2. *Знайдіть мінімальні многочлени матриць:*

- $\mathbb{J}_2(1) \oplus \mathbb{J}_3(4) \oplus \mathbb{J}_5(1)$;
- $\mathbb{J}_4(2) \oplus \mathbb{J}_2(2) \oplus \mathbb{J}_4(2) \oplus \mathbb{J}_3(2)$;
- $\mathbb{J}_1(1) \oplus \mathbb{J}_2(-2) \oplus \mathbb{J}_3(3) \oplus \mathbb{J}_4(-4)$;
- $\mathbb{J}_2(-1) \oplus \mathbb{J}_1(-1) \oplus \mathbb{J}_3(2) \oplus \mathbb{J}_4(-2)$.

Задача 9.3. *Знайдіть мінімальні многочлени матриць:*

- $\mathbb{J}_4(2) \oplus \mathbb{J}_k(4) \oplus \mathbb{J}_3(6)$;
- $\mathbb{J}_k(-2) \oplus \mathbb{J}_2(-2) \oplus \mathbb{J}_3(-2) \oplus \mathbb{J}_3(-2)$;
- $\mathbb{J}_3(1) \oplus \mathbb{J}_k(1) \oplus \mathbb{J}_2(4) \oplus \mathbb{J}_m(4)$;
- $\mathbb{J}_2(-1) \oplus \mathbb{J}_3(1) \oplus \mathbb{J}_5(-1) \oplus \mathbb{J}_k(1)$.

Задача 9.4. *Доведіть, що ідемпотентна матриця (тобто матриця A, що задовольняє рівняння $A^2 = A$) є діагоналізовною.*

Задача 9.5. *Доведіть, що мінімальний многочлен будь-якої квадратної блочно-діагональної матриці дорівнює найменшому спільному кратному мінімальних многочленів її діагональних блоків.*

Задача 9.6. *Нехай лінійний оператор, матрицею якого є матриця A, має нетривіальний інваріантний підпростір. Доведіть, що мінімальний многочлен матриці обмеження оператора A на цей інваріантний підпростір ділить $m_A(x)$.*

10 Інваріантні підпростори

10.1 Теоретичні відомості

Ж.Н.Ф. матриці дає дуже потужний інструмент для вивчення та знаходження інваріантних підпросторів матриці у випадку $K = \mathbb{C}$. Протягом цієї глави ми вважатимемо $K = \mathbb{C}$. Нагадаємо означення:

Означення 10.1. *Інваріантрним підпростором квадратної матриці $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ називається такий підпростір $U \subset K^n$, що $Av \in U$ для довільного $v \in U$.*

Цілком очевидно, що довільна матриця має інваріантними підпросторами нульовий підпростір та весь простір K^n. Ці підпростори називаються тривіальними. Надалі під інваріантним підпростором ми розумітимемо нетривіальний інваріантний підпростір (тобто відмінний від 0 та K^n). Основні відомості про інваріантні підпростори зібрано в наступні теоремі:

Теорема 10.1.

1. *Кількість інваріантних підпросторів матриці A є скінченною тоді та лише тоді, коли в Ж.Н.Ф. матриці A кожному власному числу відповідає єдина клітина Жордана. Іншими словами, коли $\chi_A(x) = m_A(x)$.*
2. *Кожен власний підпростір матриці A є прямою сумою своїх перетинів з кореневими підпросторами матриці A.*

10.2 Основні типи задач

Можна виділити один природний тип задач з цієї тематики:

1. Знайти усі інваріантні підпростори матриці A.

Змістовною та придатною до розв'язання ця задача стає у двох випадках: коли матриця A діагоналізовна, або коли матриця A має скінченну кількість інваріантних підпросторів. Нижче ми наведемо алгоритми розв'язання задач саме в цих випадках. Нічого іншого на практичних заняттях не зустрічається.

10.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 10.1. *Знаходженя усіх інваріантних підпросторів діагоналізовної матриці A:*

Для знаходження усіх інваріантних підпросторів діагоналізовної матриці A необхідно:

- Звести матрицю A до діагонального вигляду (наприклад, використовуючи алгоритм 4.3). Зафіксувати вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ власного базису.

- Інваріантний підпростір виписується за таким правилом: В кожному з $V(\lambda, A)$ вибирається деякий підпростір, і утворюється пряма сума. Зокрема, якщо матриця A має всі різні власні числа (простий спектр), то власний підпростір A однозначно задається підмножиною векторів з $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (порожня підмножина відповідає 0, а весь набір — K^n). У цьому випадку матимемо 2^n інваріантних підпросторів.

Алгоритм 10.2. *Знаходження усіх інваріантних підпросторів матриці A, для якої $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)$:*

Для знаходження усіх інваріантних підпросторів матриці A, для якої $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)$, необхідно:

- Звести матрицю A до Ж.Н.Ф. (наприклад, використовуючи алгоритм 5.2). Зафіксувати вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ власного базису.

- Інваріантний підпростір виписується за таким правилом: Для кожної клітини Жордана, що входить в Ж.Н.Ф. матриці A, і якій відповідає ланцюжок $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+l}$ базисних векторів, вибираються декілька початкових базисних векторів, починаючи з власного вектора. Об'єднання по всіх клітинах Жордана дає базис інваріантного підпростору. Зокрема, якщо розміри клітин Жордана $k_1, k_2, \ldots, k_s$, матимемо $\prod_{i=1}^{s}(k_i + 1)$ власних підпросторів.

10.4 Приклади

Приклад 10.1. *Знайдіть усі підпростори, що інваріантні відносно матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку зводимо A до Ж.Н.Ф. Для цього спершу ми обчислюємо характеристичний многочлен нашої матриці:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ = (4-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) + 4 + 4 - 2\lambda - \\ - 2(4-\lambda) + 4(1-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Маємо власне число $\lambda_1 = 2$ кратності 2 та власне число $\lambda_2 = 1$ кратності 1. Для обчислення типу Ж.Н.Ф. нашої матриці треба знайти дефект матриці $A-2E$:

$$A-2E=\left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)\mapsto\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Маємо, що дефект матриці $A-2E$ дорівнює 2. Отже, матриця A має Ж.Н.Ф. $\mathbb{J}_1(1)\oplus\mathbb{J}_1(2)\oplus\mathbb{J}_1(2)$ і є діагоналізовною.

Знаходимо власний вектор з власним числом 1:

$$A-E=\left(\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\{[2]+1*[3]\}\{[1]+2*[3]\}\mapsto\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mapsto\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\{[2]+1*[1]\}\mapsto\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Вибираємо x_3 вільною змінною:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -2x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right., \quad \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right)x_3.$$

Отже, ми можемо вибрати

$$v_1=\left(\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right).$$

Знаходимо власні вектори з власним числом 2:

$$A-2=\left(\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)\mapsto\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Вибираємо x_1 та x_3 вільними змінними:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_1+x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right., \quad \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)x_2+\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right)x_3.$$

Отже, ми можемо вибрати

$$v_2=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right), \quad v_3=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right).$$

Маємо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad S=\left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Матриця A є діагоналізовною, проте має власне число 2 кратності більше за одиницю. За алгоритмом 10.1 виписуємо усі інваріантні підпростори матриці A: 0; $\mathbb{C}^3$; $\mathbb{C}v_1$; $\mathbb{C}v_2$; $\mathbb{C}(av_2+v_3)$, $a \in \mathbb{C}$; $\mathbb{C}v_2 \oplus \mathbb{C}v_3$; $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$; $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}(av_2+v_3)$, $a \in \mathbb{C}$.

□

Приклад 10.2. *Знайдіть усі підпростори, що інваріантні відносно матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку зводимо A до Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda).$$

Маємо власні числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ та $\lambda_3 = 3$ кратності 1.

Знаходимо власний вектор з власним числом 1:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї системи, що має ранг 1, очевидний:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, ми можемо вибрати

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 2:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\{[1] + (-3) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{(-1) * [1]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= 2x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, ми можемо вибрати

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 3:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \{[1] + 2 * [2]\} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \{(-1/2) * [1]\}\{(-1) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= -9/2x_3 \\ x_2 &= 3x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} x_3/2.$$

Отже, ми можемо вибрати

$$v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Маємо Ж.Н.Ф. B матриці A та матрицю переходу S:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця A діагоналізовна і має простий спектр. Отже, ми матимемо рівно 8 інваріантних підпросторів: 0; $\mathbb{C}^3$; $\mathbb{C}v_1$; $\mathbb{C}v_2$; $\mathbb{C}v_3$, $\mathbb{C}v_2 \oplus \mathbb{C}v_3$; $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$; $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_3$. □

Приклад 10.3. *Знайдіть усі підпростори, що інваріантні відносно матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Спочатку зводимо A до Ж.Н.Ф. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Маємо власне число $\lambda_1 = 1$ кратності 2 та власне число $\lambda_2 = 2$ кратності 1.

Знаходимо власний вектор з власним числом 2:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \{[1] + 1 * [2]\} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \{(-1) * [1]\}\{(-1) * [2]\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_3 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 &= 2x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3.$$

Отже, ми можемо вибрати

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 1:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок цієї ситеми очевидний. Можна вибрати, наприклад,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо останній базисний вектор:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Розв'язок цієї ситеми також очевидний. Можна вибрати, наприклад,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Кожному власному числу матриці A відповідає рівно одна клітина Жордана. Отже, за допомогою алгоритму 10.2 виписуємо всі інваріантні підпростори: 0; $\mathbb{C}^3$; $\mathbb{C}v_1$; $\mathbb{C}v_2$; $\mathbb{C}v_2 \oplus \mathbb{C}v_3$; $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$. $\square$

10.5 Задачі теоретичного характеру

Приклад 10.4. *Доведіть, що довільна комплексна матриця розміру $n \times n$ має інваріантний підпростір розміру $n-1$.*

Доведення. Зведемо A до Ж.Н.Ф. Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — відповідний Жорданів базис. З вигляду Ж.Н.Ф. легко отримуємо, що підпростір, породжений векторами $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ є інваріантним відносно A. $\square$

Приклад 10.5. *Для матриць A та B з $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ справедлива рівність $A^2 = B^2 = E$. Доведіть, що в $\mathbb{C}^n$ існує одно- або двовимірний підпростір, інваріантний відносно A та B одночасно.*

Доведення. Спочатку варто зауважити, що обидві матриці мають анулюючий многочлен $x^2 - 1$, який не має кратних коренів. Коренями цього многочлена є числа ± 1. Отже, матриці A та B діагоналізовні, крім того, єдиними ненульовими власними підпросторами цих матриць можуть бути лише підпростори $V(1, A)$, $V(-1, A)$, $V(1, B)$ та $V(-1, B)$. Далі, з діагоналізовності матриць одразу випливає, що

$$K^n = V(1, A) \oplus V(-1, A), \quad K^n = V(1, B) \oplus V(-1, B).$$

Нехай m_1 позначає максимум серед розмірностей власних підпросторів $V(1, A)$ та $V(-1, A)$, а m_2 позначає максимум серед розмірностей підпросторів $V(1, B)$ та $V(-1, B)$. Якщо $m_1 + m_2 > n$, тоді відповідні підпростори максимальних розмірностей перетинаються і ми легко можемо знайти в цьому перетині одновимірний підпростір, інваріантний відносно A та B одночасно. Отже, припустимо, що $m_1 + m_2 \leq n$. Звідси випливає, що n — парне, а розмірності усіх власних підпросторів дорівнюють $n/2$.

Розглянемо матриці AB та BA. За умов задачі виконується рівність $(AB)(BA) = AB^2A = AEA = A^2 = E$. Аналогічно $(BA)(AB) = E$. Отже, $(AB)\ (BA) = (BA)\ (AB)$. Згідно з прикладом 3.8 існує вектор $v \neq 0$, що є власним одночасно до матриць AB та BA. Розглянемо підпростір U, породжений векторами v, Av та Bv. Оскільки $A(Av) = A^2v = Ev = v$, $A(Bv) = (AB)v = \lambda v$, $B(Bv) = v$ та $B(A)v = \lambda' v$, підпростір U інваріантний відносно A та B. Якщо він має розмірність меншу за 3, доведення закінчено. Якщо ні, тоді його розмірність рівна 3, що є непарним числом. Отже, згідно з першою частиною доведення U містить одновимірний підпростір, інваріантний відносно A та B одночасно. $\square$

10.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 10.1. *Знайдіть усі підпростори, що інваріантні відносно матриць*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.2. *Знайдіть усі інваріантні підпростори для* $\mathbb{J}_k(\lambda)$.

Задача 10.3. *Доведіть, що* $\mathbb{C}^n$ *не можна розкласти в пряму суму підпросторів, інваріантних до матриці* A*, якщо* A *має єдину інваріантну пряму.*

11 Функції від матриць

11.1 Теоретичні відомості

Жорданова нормальна форма матриці дає дуже сильне технічне знаряддя для обчислення функцій від матриці. Функція від матриці визначається дуже просто: спочатку очевидним чином визначається многочлен від матриці, далі функція розкладається в ряд Тейлора (розглядаються тільки такі функції), після чого функцією від матриці вважається границя часткових сум ряду Тейлора (які є многочленами), якщо така існує в топології покоординатної збіжності. Для простоти ми вважатимемо $K = \mathbb{C}$.

Основна властивість Ж.Н.Ф. стосовно обчислення функцій від матриць описана в наступній теоремі:

Теорема 11.1. *Нехай $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ та $f(x)$ така функція, для якої існує $f(A)$. Тоді*

1. *Для довільної оборотної матриці S виконується рівність*

$$f(SAS^{-1}) = Sf(A)S^{-1}.$$

2. *Якщо $A = \mathbb{J}_k(\lambda)$, тоді*

$$f(\mathbb{J}_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

З наведеної вище теореми легко випливає алгоритм знаходження функцій від довільних матриць, що буде наведений нижче:

11.2 Основні типи задач

Так само, як і в попередній частині, можна виділити один природний тип задач з цієї тематики: Обчислити задану функцію f від заданої матриці A.

11.3 Алгоритми розв'язання основних типів задач

Алгоритм 11.1. *Обчислення заданої функції f від заданої матриці A:*

Для того, щоб обчислити задану функцію f від заданої матриці A, необхідно:

- Звести матрицю A до Ж.Н.Ф. B та знайти матрицю переходу S (використовуючи, наприклад, алгоритм 5.3).
- Обчислити $f(B)$, використовуючи формулу з другої частини теореми 11.1.
- Обчислити $f(A)$ за формулою $f(A) = Sf(B)S^{-1}$.

11.4 Приклади

Приклад 11.1. *Обчисліть* $\exp(A)$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо алгоритм 11.1. Спершу нам треба звести задану матрицю A до Ж.Н.Ф. Обчислюємо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)-4 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda-5).$$

Маємо два власні числа: $\lambda_1 = 0$ та $\lambda_2 = 5$, обидва кратності 1. Отже, Ж.Н.Ф. матриці A матиме вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 0:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, можна вибрати

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 5:

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1.$$

Отже, можна вибрати

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу матиме вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для обчислень нам ще буде потрібна матриця S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \{[1]\leftrightarrow[2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \{[2] + 2 * [1]\} \mapsto$$
$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \{(1/5) * [2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right)$$
$$\{[1] + (-2) * [2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right).$$

Отже,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислюємо $\exp(B)$:

$$\exp(B) = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна знайти і $\exp(A)$:

$$\exp(A) = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & e^5 \\ 1 & 2e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4 + e^5)/5 & (-2 + 2e^5)/5 \\ (-2 + 2e^5)/5 & (1 + 4e^5)/5 \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 11.2. *Обчисліть* $\exp(A)$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використаємо алгоритм 11.1. Спершу нам треба звести задану матрицю A до Ж.Н.Ф. Обчислюємо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= ((2-\lambda)(2-\lambda)-1)(1-\lambda) = (\lambda^2-4\lambda+3)(1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Маємо два власні числа: $\lambda_1 = 1$ кратності 2 та $\lambda_2 = 3$ кратності 1. Для визначення типу Ж.Н.Ф. потрібно знайти дефект матриці $A-E$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що ранг цієї матриці дорівнює 2, тобто її дефект дорівнює $3-2=1$. Отже, Ж.Н.Ф. B матриці A матиме вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 3:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї однорідної С.Л.Р. легко вгадується, наприклад,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 1:

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї однорідної С.Л.Р. також легко вгадується, наприклад,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо останній базисний вектор v_3. Для цього розв'язуємо таку неоднорідну С.Л.Р.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Розв'язок цієї системи теж дуже просто вгадати, наприклад,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця переходу матиме вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обчислень нам ще буде потрібна матриця S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \{[2] + (-1) * [1]\} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\{[1] + (-1) * [2]\} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отже,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислюємо $\exp(B)$:

$$\exp(B) = \exp \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що $(\exp x)' = \exp x$. Тепер можна знайти і $\exp(A)$:

$$\exp(A) = S\exp(B)S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e & e \\ e^3 & -e & -e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^3+e)/2 & (e^3-e)/2 & e \\ (e^3-e)/2 & (e^3+e)/2 & -e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 11.3. *Обчисліть* A^{100}, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Зводимо матрицю A до Ж.Н.Ф. Обчислюємо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(5-\lambda)+6 = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3).$$

Маємо два власні числа $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = 3$, обидва кратності 1. Отже, Ж.Н.Ф. матриці A матиме вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 2:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, можна вибрати

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом 3:

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_1 вільною змінною:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & 3x_1/2 \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_1/2.$$

Отже, можна вибрати

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу матиме вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для обчислень нам ще буде потрібна матриця S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \{[2] + (-1) * [1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$
$$\{[1] + (-2) * [2]\} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Отже,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислюємо B^{100}:

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}.$$

Тепер можна знайти і A^{100}:

$$A^{100} = S \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{100} & 2 \cdot 3^{100} \\ 2^{100} & 3^{101} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{100} - 2 \cdot 3^{100} & -2^{101} + 2 \cdot 3^{100} \\ 3 \cdot 2^{100} - 3^{101} & -2^{101} + 3^{101} \end{pmatrix}.$$

□

Приклад 11.4. *Обчисліть* $\sin A$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Зводимо матрицю A до Ж.Н.Ф. Обчислюємо характеристичний многочлен:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \pi - 1 - \lambda & 1 \\ -1 & \pi + 1 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - \pi)^2.$$

Маємо власне число $\lambda_1 = \pi$ кратності 2. Очевидно, що матриця $A - \pi E$ ненульова. Отже, Ж.Н.Ф. матриці A матиме вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор з власним числом π:

$$A - \pi E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вибираємо x_2 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, можна вибрати

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо вектор v_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Вибираємо x_1 вільною змінною:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_1 + 1 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2.$$

Отже, можна вибрати

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу матиме вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обчислень нам ще буде потрібна матриця S^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \{[2] + (-1) * [1]\} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Отже,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спочатку обчислюємо $\sin B$ (нагадаємо, що $\sin' x = \cos x$):

$$\sin B = \sin \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна знайти і $\sin A$:

$$\exp(A) = S \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

11.5 Задачі теоретичного характеру

Приклад 11.5. *Знайдіть визначник матриці* $\exp(A)$.

Доведення. Нехай B позначає Ж.Н.Ф. матриці A, а λ_i, $1 \le i \le n$ позначають власні числа матриці A з урахуванням кратності. Зрозуміло, що $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ та $\det \exp(A) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i)$. Звідси $\det \exp(A) = \exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$. Але сума всіх власних чисел матриці A дорівнює сліду $s(A)$ матриці A, тобто сумі її діагональних елементів. Отже, робимо висновок, що $\det \exp(A) = \exp(s(A))$. □

Приклад 11.6. *Доведіть матричну тригонометричну тотожність* $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$.

Доведення. Твердження цієї задачі легко випливає з наступного більш загального зауваження: Якщо для матриці A визначено функції $f(x)$ та $g(x)$, то для A визначено функцію $h(x) = f(x)g(x)$, причому $h(A) = f(A)g(A)$.

Легко зрозуміти, що згідно з теоремою 11.1 сформульоване твердження досить довести для клітини Жордана $\mathbb{J}_k(\lambda)$. Використавши формулу з другої частини теореми для лівої та правої частин рівності $h(A) = f(A)g(A)$ та прирівнявши відповідні коефіцієнти цих матриць, ми отримаємо відому формулу Лейбніца обчислення похідної добутку:

$$\frac{(f(x)g(x))^{(n)}}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(x)}{(n-k)!}.$$

Отже, необхідне твердження випливає з правила Лейбніца. □

11.6 Задачі для самостійного розв'язання

Задача 11.1. *Обчисліть* $\exp(A)$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.2. *Обчисліть* $\exp(A)$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.3. *Обчисліть* $\exp(A)$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.4. *Обчисліть* A^{333}, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.5. *Обчисліть* A^{200}, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.6. *Обчисліть* A^{150}, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix}.$$

Задача 11.7. *Обчисліть* $\sqrt{A}$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.8. *Обчисліть* $\ln A$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.9. *Обчисліть* $\exp(A)$, *де*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.10. *Матриці A та B подібні, причому $B = T^{-1}AT$ для деякої невиродженої матриці T. Відомо, що $f(A)$ існує. Доведіть, що $f(B)$ існує та $f(B) = T^{-1}f(A)T$.*

Задача 11.11. *Доведіть, що матриця $\exp(A)$ існує для довільної матриці A. Крім того, доведіть, що матриця $\exp(A)$ завжди є невиродженою.*

Задача 11.12. *Відомо, що $f(A)$ та $g(A)$ існують та $h(x) = f(x) + g(x)$. Доведіть, що $h(A)$ існує та $h(A) = f(A) + g(A)$.*

Задача 11.13. *Доведіть, що функцію $f(x) = 1/x$ можна рахувати від усіх невироджених матриць, і, крім того, $f(A) = A^{-1}$.*

Задача 11.14. *Нехай функція $f(x)$ визначена на множині власних чисел матриці A (спектр матриці). Припустимо, що існує многочлен, значення якого на згадуваному спектрі збігаютьса зі значеннями функції f. Доведіть, що таких многочленів нескінченно багато, крім того, серед них є один та тільки один, що має степінь, меншу за степінь мінімальнього многочлена матриці A (цей многочлен називаєтьса інтерполяційним многочленом Лагранжа - Сільвестра функції $f(x)$).*

Задача 11.15. *Нехай функція $f(x)$ має сенс при $x = A$. Доведіть, що визначник матриці $f(A)$ задовольняє рівність*

$$\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\dots f(\lambda_n),$$

де $\{\lambda_i\}$ — власні числа A з урахуванням кратності.

Література

[1] Сборник задач по алгебре Под ред. А.И.Кострикина.- М., 1987.

[2] Кострикин А.И., Введение в алгебру.- М., 1977.

[3] Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре.- М., 1978.

[4] Фаддеев Д.К., Соминский И.С., Сборник задач по высшей алгебре.- М., 1977.